UNIDAD 4

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRÁULICA

Introducción.

En esta unidad estudiaremos las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos en su versión más simple: ***Fluidos incompresibles, ideales con flujo permanente y unidimensional.***

Es decir, la teoría que estudiaremos será válida para líquidos y algunos gases moviéndose a bajas velocidades de manera que *no presenten variaciones de densidad ante los cambios de presión*. Además, *supondremos* que *no tienen viscosidad* y que, por lo tanto, no presentarán pérdidas de energía mientras se estén moviendo. *Por ser permanentes, las condiciones de flujo se mantendrán constantes durante todo el tiempo* que dure el fenómeno, además *consideraremos que los valores promedio de velocidad, presión, etc. en una sección, son representativos de toda la sección*, por lo cual las variaciones sólo se darán a lo largo del eje, es decir *en una dimensión*.

Como se podrá observar, aquí estudiaremos el caso más sencillo de la Mecánica de Fluidos, delimitado por las hipótesis anteriores. Aunque su aplicación a problemas reales, obviamente está limitada al "razonable cumplimiento" de dichas hipótesis, la teoría que aquí desarrollaremos constituye las bases para la comprensión y dominio de problemas más complejos.

Las ecuaciones fundamentales de la Hidráulica son tres:

1. Ecuación de Continuidad
2. Ecuación de Bernoulli
3. Ecuación del Impulso y la Cantidad de Movimiento

Estas ecuaciones provienen de los principios universales de la Mecánica:

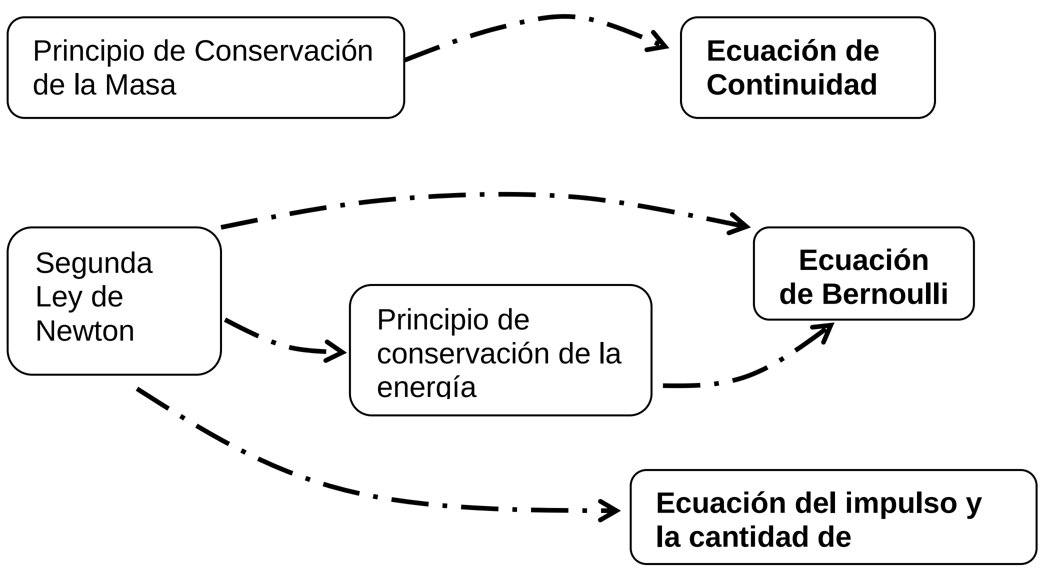
La ***ecuación de Continuidad*** es la aplicación del *principio de conservación de la masa* al movimiento de los fluidos.

Cuando estudiamos el comportamiento mecánico de un cuerpo sólido, es decir cuando estudiamos como se mueve o como se deforma, resulta evidente que la masa del cuerpo se conserva, de ahí que prácticamente no aplicáramos este principio o mejor dicho, se hace implícitamente. La situación es diferente al tratar con fluidos, ya que es difícil identificar la cantidad de masa que interviene en un fenómeno y generalmente es una función del tiempo.

Para ilustrar el planteamiento anterior consideremos el chorro de agua que sale por la llave de nuestra casa. La cantidad de agua que puede salir está determinada, entre otros factores, por el tiempo que mantengamos la llave abierta; o sea que podemos sacar un vaso, una cubeta, llenar un tinaco o una alberca. Depende del tiempo en que esté abierta la llave. Entonces la cantidad de masa y el hecho de que ésta se conserva en un fenómeno hidráulico es un aspecto muy importante a tomarse en cuenta.

La ***ecuación de Bernoulli*** es el principio de conservación de la energía aplicado a los fluidos en movimiento. En Dinámica de la partícula se puede deducir la ecuación de conservación de la energía como una versión (simplificada) del principio del trabajo y la energía. Aquí encontraremos la Ecuación de Bernoulli por dos caminos: a) partiendo del principio de conservación de la energía y b) a partir del análisis de las fuerzas que actúan sobre una partícula de un fluido en movimiento, mediante la segunda ley de Newton.

La ***ecuación del Impulso y La Cantidad de Movimiento*** aplicada al movimiento de los fluidos surge de la ecuación del mismo nombre. Es aplicable a muchos problemas de Mecánica de la partícula y del cuerpo rígido. Esta ecuación también proviene de la segunda Ley de Newton integrándola de forma vectorial.



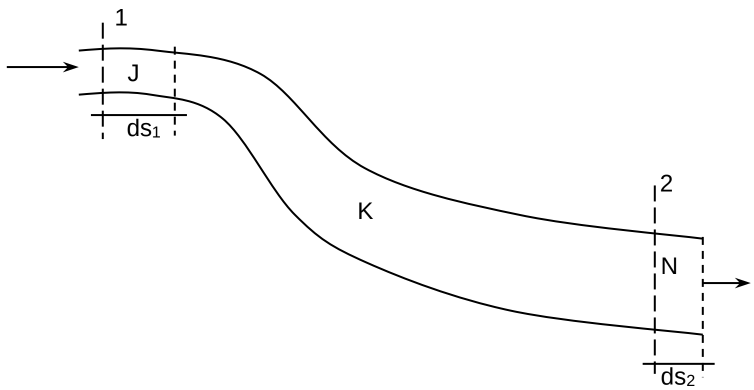
Relaciones de los principios generales de la Mecánica y las ecuaciones de la Hidráulica.

Estas tres ecuaciones, en la versión simplificada que estudiaremos o en versiones más avanzadas, nos permiten resolver prácticamente cualquier problema de hidráulica (fluidos incompresibles). Cuando se trabaja con gases (fluidos compresibles) es común necesitar además, la segunda ley de la termodinámica u otra ecuación de estado.

Ecuación de continuidad.

La aplicación del principio de conservación de la masa a los flujos, genera la llamada ecuación de continuidad. Aquí la deduciremos para un *flujo permanente, unidimensional* de un *fluido compresible* y posteriormente para uno *incompresible*.

Considérese el tubo de corriente finito, mostrado en la figura, a través del cual circula el flujo ya mencionado



El *volumen de control* está limitado por el tubo de corriente y las secciones de control 1 y 2, y está fijo en el espacio. A través de las secciones de control puede fluir la masa y la energía

El *sistema de fluido, es decir la porción de masa que consideraremos,* es la contenida en el volumen de control (J + K) en el tiempo t.

Aunque el volumen de control se encuentra fijo en el espacio, el sistema se mueve corriente abajo, de manera que en el tiempo t + dt ocupa el volumen (K +N)

Por conservación de la masa:

Masa del fluido en J+K en el tiempo t = Masa del fluido en K+N en el tiempo t+dt

$$(m_J + m_K)_t = (m_K + m_N)_{t+dt} \qquad 4.1$$

Como el flujo es permanente la masa no cambia con el tiempo

$$(m_K)_t = (m_K)_{t+dt}$$

Cancelando estos términos en la ec. 4.1

$$(m_J)_t = (m_N)_{t+dt} \qquad 4.2$$

Es decir: ***la masa que entra*** (al volumen de control) ***es igual a la masa que sale***. Este sería el enunciado del principio de conservación de la masa aplicado al flujo de un fluido.

Por otro lado los volúmenes J y N son:

$$V_J = A_1\, ds_1 \qquad y \qquad V_N = A_2\, ds_2$$

Así:

$$(m_J)_t = \rho_1 V_J = \rho_1 A_1 ds_1 \quad \text{y} \quad (m_N)_{t+dt} = \rho_2 V_N = \rho_2 A_2 ds_2$$

$$\rho_1 A_1 ds_1 = \rho_2 A_2 ds_2 \qquad 4.3$$

Dividiendo la igualdad entre dt

$$\rho_1 A_1 ds_1 / dt = \rho_2 A_2 ds_2 / dt$$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad 4.4$$

Es conveniente recordar que el gasto en masa

$$Q_m = m / t = \rho\, V / t = \rho\, A\, s / t = \rho\, A\, v = \rho\, Q$$

De manera que la ec. 4.4 plantea que el ***régimen de masa o gasto en masa en la sección 1 es igual al gasto en masa en la sección 2***, dicho de otra manera ***el gasto en masa es constante en cualquier sección.***

$$Q_{m1} = Q_{m2} \qquad 4.5$$

Las Ecs. 4.4 y 4.5 son versiones de la ecuación de continuidad para un *fluido compresible con flujo permanente.*

Si el fluido es *incompresible* la densidad es constante $\rho_1 = \rho_2 = cte$

Entonces $$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad 4.6$$

$$Q_1 = Q_2 = Q = cte \qquad 4.7$$

El gasto que entra *(al volumen de control)* ***es igual al gasto que sale***,

Este es el enunciado de la ecuación de continuidad para un fluido *incompresible con flujo permanente*.

Otra forma de enunciado es:

El gasto es constante en todas las secciones del conducto, mientras no haya fugas o aportes.

Si escribimos el área en función del diámetro tenemos:

$$\pi /4\, D_1^2\, v_1 = \pi /4\, D_2^2\, v$$

Cancelando $\pi /4$ queda:

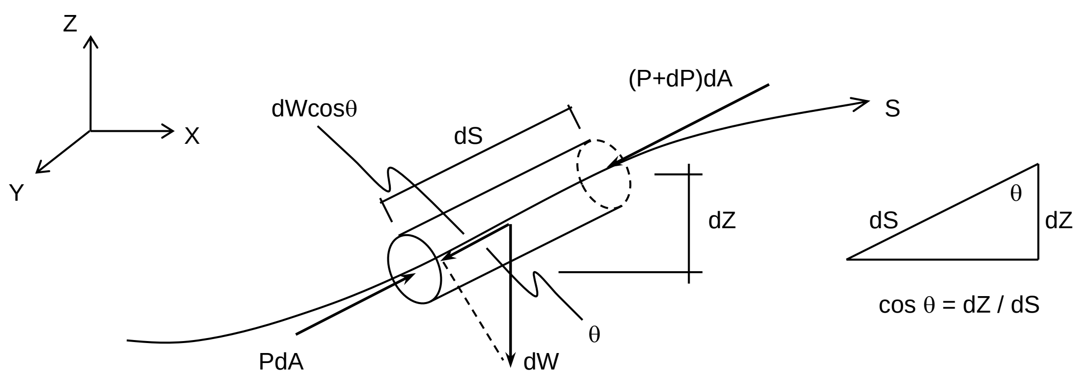
$$D_1^2\, v_1 = D_2^2\, v \qquad 4.8$$

Las ecuaciones 4.6, 4.7 y 4.8 son versiones de la ecuación de continuidad, dentro de ellas la más usada es la 4.6.

Ecuación de Bernoulli.

Deduciremos la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal incompresible moviéndose con un flujo permanente y unidimensional a partir de la segunda ley de Newton. Para ello consideremos una partícula de fluido de forma cilíndrica que se está moviendo de manera acelerada a lo largo de una línea de corriente S en dirección positiva. Como el fluido es ideal, es decir carente de viscosidad, no existen fuerzas tangenciales que se opongan al movimiento de la partícula. Las únicas fuerzas que están actuando sobre la partícula son:

1.- La fuerza con que la tierra atrae a la partícula, es decir el peso dW. Esta se descompone en dos componentes, la normal a la línea de corriente y que se anula con las fuerzas normales de presión, y la tangencial a la línea de corriente, que si contribuye a la aceleración.
2.- Las fuerzas de presión que actúan perpendicularmente a las bases del cilindro y que provienen del resto del fluido, es decir, el que rodea a la partícula.
3.- Las fuerzas de presión que actúan sobre la cara curva del cilindro, que son perpendiculares (o normales) a la línea de corriente y que se anulan entre sí y con la componente normal del peso, ya que no existe aceleración en esta dirección.



El peso es $\quad d\,W = \gamma\ dV = \rho\ g\ dA\ dS$
La masa es $\quad d\,m = \rho\ dV = \rho\ dA\ dS$

Y la componente del peso en dirección tangencial es

$$dW \cos\theta = \rho\ g\ dA\ dS \cos\theta$$
$$dW \cos\theta = \rho\ g\ dA\ dS\ dZ / dS$$
$$dW \cos\theta = \rho\ g\ dA\ dZ$$

Aplicando la segunda ley de Newton en dirección S: $\quad \Sigma F = m\ a$

$$P\ dA - (P + dP)\ dA - \rho\ g\ dA\ dZ = (\rho\ dA\ dS)\ a$$

Eliminando P dA, sustituyendo $a = v\ dv/ds$ y despejando tenemos:

$$-\,dP\ dA - \rho\ g\ dA\ dZ - (\rho\ dA\ dS)\ v\ dv/ds = 0$$

Dividiendo entre $-\rho$ g dA queda

$$\frac{dP}{\rho g} + dZ + \frac{vdv}{g} = 0$$

O bien
$$\frac{dP}{\gamma} + dZ + \frac{vdv}{g} = 0$$

Que se conoce como la ecuación de Euler para una línea de corriente.

Integrando entre dos puntos cualesquiera de la línea de corriente obtenemos:

$$\frac{1}{\gamma}\int_{P1}^{P2} dP + \int_{Z1}^{Z2} dZ + \frac{1}{g}\int_{v1}^{v2} vdv = 0$$

$$\frac{1}{\gamma}(P_2 - P_1) + (Z_2 - Z_1) + \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) = 0$$

O bien
$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

O también
$$\frac{P}{\gamma} + Z + \frac{v^2}{2g} = H = cte.$$

Que es la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente, pero que también podemos usar, en cualquiera de sus tres versiones, para un tubo de corriente finito, cuando se consideran los valores promedio de las variables en cada sección; Es decir, cuando se considera un flujo unidimensional.

Tipos de Energía en el Flujo de un fluido ideal e incompresible.

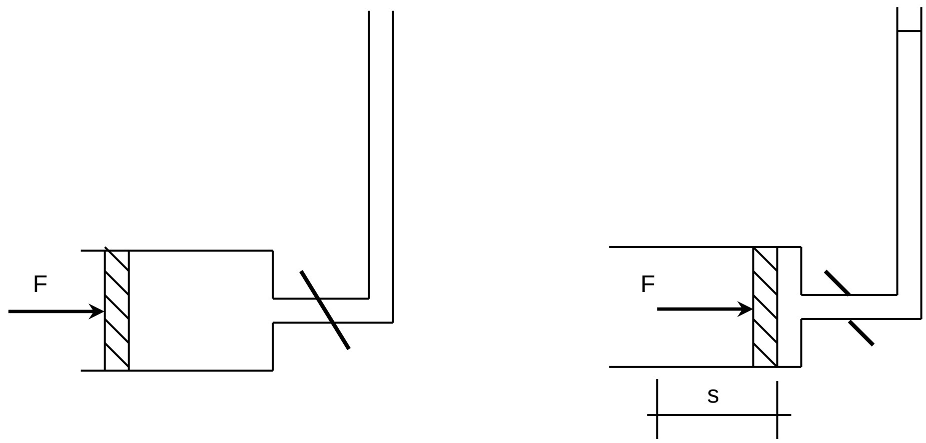
Cuando está en movimiento un líquido ideal posee tres tipos de energía:

1.- energía potencial de posición $E_Z = W\ h = m\ g\ Z$
2.- energía cinética o de velocidad $E_v = ½\ m\ v^2$
3.- energía potencial de presión $E_P = P\ m / \rho$

Dónde: W es el peso; m es la masa; g es la aceleración de la gravedad; v es la velocidad; P es la presión y ρ es la densidad.

Los dos primeros tipos de energía son conocidos por nosotros desde los cursos de Física elemental, ***la energía de presión*** *es la capacidad que tiene el fluido para hacer trabajo debido a la presión a la que está sometido*.

Para encontrar la ecuación de la energía de presión, necesitamos considerar un cilindro lleno de un líquido incompresible. El cilindro tiene en un extremo un émbolo y en el otro una tubería conectada mediante una válvula



Al inicio la válvula está cerrada, de manera que al ejercerse una fuerza F sobre el pistón, la presión dentro del cilindro se incrementa. Al abrir la válvula, el líquido sube por la tubería; es decir, las fuerzas de presión realizan un trabajo sobre el líquido, entonces:

Energía de presión = trabajo realizado por las fuerzas de presión

$$E_P = FS = PAS = PV$$

Por otro lado $\rho = m / V$ entonces $V = m / \rho$ sustituyendo:

$$E_P = P\ m / \rho$$

Que es la expresión buscada.

Principio de conservación de la energía: Ecuación de Bernoulli. 2ª deducción

Ahora sí estamos en condiciones de aplicar *el principio de conservación de la energía al flujo permanente unidimensional de un fluido ideal incompresible*. El enunciado tradicional del principio de conservación de la energía es: "*en un sistema cerrado la energía no se crea ni se destruye, solamente se transforma*", o bien "*la suma de energías permanece constante".* En Hidráulica es más conveniente expresarlo de la siguiente manera:

La suma de energías en la sección 1 = La suma de energías en la sección 2

E presión1 +E posición1 + E velocidad1 = E presión2 +E posición2 + E velocidad2

$$E_{P1} + E_{Z1} + E_{v1} = E_{P2} + E_{Z2} + E_{v2}$$

$$P_1\ m / \rho + m\ g\ Z_1 + \tfrac{1}{2}\ m\ v_1^2 = P_2\ m / \rho + m\ g\ Z_2 + \tfrac{1}{2}\ m\ v_2^2 \qquad 4.7$$

Como es muy difícil saber la cantidad de líquido que interviene en un fenómeno hidráulico, es preferible determinar *la energía por unidad de peso*, a esto le llamamos ***energía específica.*** Al dividir la ecuación anterior entre mg queda:

$$P_1/\rho g + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = P_2/\rho g + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \qquad 4.8$$

Como $\rho g = \gamma$ también es común escribir:

$$P_1/\gamma + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = P_2/\gamma + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \qquad 4.9$$

Las Ecuaciones 4.8 y 4.9 son formas “extendidas” de la ecuación de Bernoulli para un fluido ideal incompresible que se mueve con flujo permanente y unidimensional.

De manera resumida puede escribirse

$$\Sigma H_1 = \Sigma H_2 = \text{cte} \qquad 4.10$$

Y su enunciado es:

La suma de energías específicas en la sección 1 **=** ***La suma de energías especificas en la sección 2***

O también:

“la suma de energías específicas, alturas o cargas, se mantiene constante a lo largo de todo el conducto”.

A veces es más conveniente expresar a la ecuación de Bernoulli como una ***suma de diferencias***, esto se logra despejando un lado de la ecuación:

$$(P_1 - P_2)\frac{1}{\gamma} + (Z_1 - Z_2) + (v_1^2 - v_2^2)\frac{1}{2g} = 0 \qquad 4.11$$

En otras se expresa como ***presiones***, para ello multiplicamos los términos de la ec.4.9 por $\gamma = \rho$ g

$$P_1 + \gamma Z_1 + \frac{\gamma v_1^2}{2g} = P_2 + \gamma Z_2 + \frac{\gamma v_2^2}{2g} \qquad 4.12$$

O bien
$$P_1 + \rho g Z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g Z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad 4.13$$

Dimensiones y Unidades de la Ecuación de Bernoulli.

Observemos que la ecuación 4.7 es una suma de energías, mientras que la ecuación 4.9 es una suma de energías específicas. A continuación, realizaremos un análisis dimensional de cada uno de los términos de ambas ecuaciones para encontrar sus unidades en los dos sistemas MKS.

En el MKS absoluto o sistema internacional:

$$[P\ m / \rho] = \frac{N}{m^2}\frac{kg}{kg/m^3} = N\ \mathrm{m}$$

$$[\ m\ g\ Z_1\ ] = kg\frac{m}{s^2}m = N\ \mathrm{m}$$

$$[½\ m\ v_1^2\ ] = kg\frac{m^2}{s^2} = kg\frac{m}{s^2}m = N\ \mathrm{m}$$

En el MKS técnico:

$$[P\ m / \rho] = \frac{kg}{m^2}\frac{UTM}{UTM/m^3} = kg\ \mathrm{m}$$

$$[\ m\ g\ Z_1\ ] = UTM\frac{m}{s^2}m = \frac{kgs^2}{m}\frac{m}{s^2}m = kg\ \mathrm{m}$$

$$[½\ m\ v_1^2\ ] = UTM\frac{m^2}{s^2} = \frac{kgs^2}{m}\frac{m^2}{s^2} = kg\ \mathrm{m}$$

Por otro lado la ecuación de Bernoulli es la suma de energías específicas (H) es decir energía por unidad de peso:

Unidades de la energía específica	MKS absoluto o internacional	MKS técnico
$[\ H\ ] = \frac{FL}{F}$	$\frac{Nm}{N} = \mathrm{m}$	$\frac{kgm}{kg} = \mathrm{m}$

En el MKS absoluto o sistema internacional:

$$[P / \gamma\ ] = \frac{N/m^2}{N/m^3} = \frac{Nm}{N} = \mathrm{m}$$

$$[\ Z\ ] = \mathrm{m}$$

$$[\frac{v_2^2}{2g}\ ] = \frac{(m/s)^2}{m/s^2} = \mathrm{m}$$

En el MKS técnico:

$$[P / \gamma] = \frac{kg/m^2}{kg/m^3} = \frac{kgm}{kg} = m$$

$$[Z] = m$$

$$[\frac{v_2^2}{2g}] = \frac{(m/s)^2}{m/s^2} = m$$

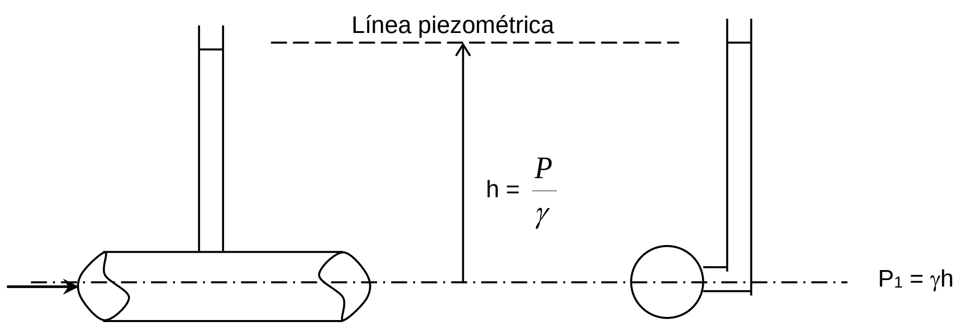
Vemos que al realizar la operación con las unidades de las energías específicas en ambos sistemas quedan unidades de longitud, de ahí que sea común referirse a los términos de la ecuación de Bernoulli como ***"alturas"*** o también como ***"cargas"***, *ya que la "altura" de una "columna" de líquido siempre provoca una* **presión o carga**

"Altura de posición"

Es más, hay maneras de obtener de manera real una "altura de presión" y una "altura de velocidad" mediante dispositivos sencillos. La "altura de posición" es la altura o cota topográfica Z del conducto, ya sea una la tubería o un canal.

Altura de presión, Piezómetro.

Si en una tubería por la que está circulando un líquido, hacemos un orificio lateral saldrá un chisguete debido a la presión que hay dentro del tubo, si en este orificio conectamos un tubo transparente vertical de pequeño diámetro, observaremos que el líquido sube hasta un cierto nivel, tal, que la presión generada por la columna de líquido igualará a la existente dentro de la tubería principal.



Piezómetro conectado a una tubería

La altura h de la columna de líquido dentro de este tubo transparente, llamado ***piezómetro***, indica la energía específica de presión dentro de la tubería principal

$$h = \frac{P}{\gamma}$$

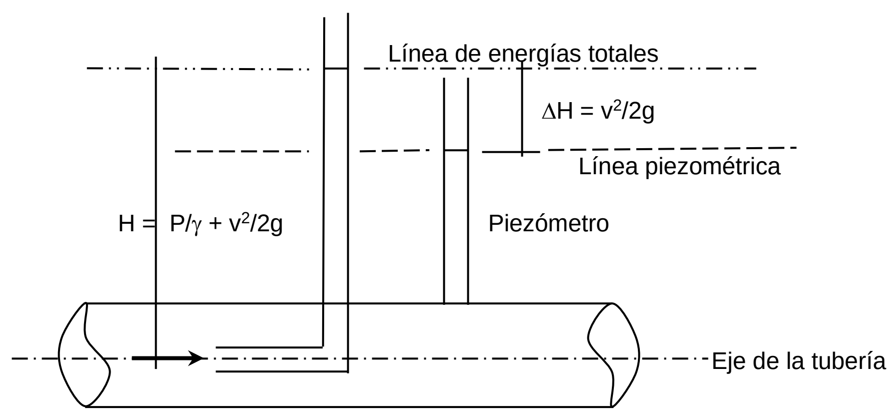
Es decir, ***la energía específica de presión es igual a la altura h del líquido dentro del piezómetro;***

Nótese que al despejar la presión $P = \gamma h$ obtenemos la ecuación de la presión hidrostática.

Si a lo largo de una tubería se colocan varios piezómetros, se puede unir la superficie libre del líquido dentro de cada uno, mediante una línea imaginaria, a esta línea se le llama ***línea piezométrica*** y nos indica el valor de la energía específica de presión, en cada sección de la tubería.

Altura de velocidad, tubo de Pitot.

De manera similar, podemos ver la ***altura de velocidad, carga de velocidad*** o mejor dicho ***la energía específica de velocidad.*** Para ello colocamos dentro de la tubería principal un pequeño tubo transparente, doblado en ángulo recto, en forma de "L", de manera que la base de la L esté enfrentada a la corriente. Este tubo se llama tubo de Pitot.



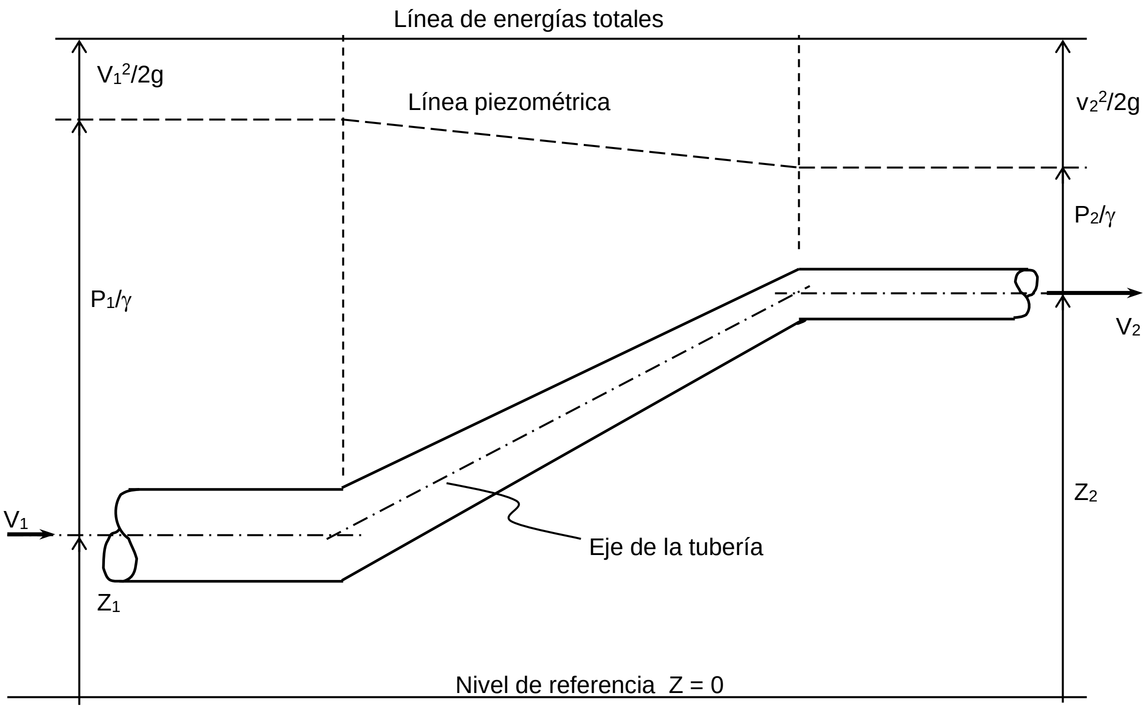
Tubo de Pitot para ver y medir la altura de velocidad

Observamos que el líquido sube por el tubo de Pitot hasta un nivel superior al que alcanza dentro del piezómetro, *la diferencia de altura entre los meniscos de los dos tubos representa* ***la altura o carga de velocidad***.

Observemos también, que *la altura de la columna de líquido en el tubo de Pitot es la suma de alturas de presión y velocidad,* de manera que *el menisco dentro del tubo de Pitot señala el* ***nivel de la energía total*** *en esa sección.* De manera que, si colocamos varios tubos de Pitot a lo largo de una tubería y unimos imaginariamente con una línea los meniscos, estaremos definiendo la ***línea de energías totales***, a lo largo de la tubería.

Representación gráfica de la ecuación de Bernoulli.

Tomando en cuenta lo anterior podemos dibujar la representación gráfica de la ecuación de Bernoulli para un líquido ideal.



Líneas de energía en una tubería con fluido ideal

La altura de posición o cota topográfica Z *es la distancia vertical medida desde un plano horizontal de referencia o banco de nivel, hasta el eje de una tubería o el fondo de un canal,* (que también llamamos plantilla). Es conveniente ubicar el plano de referencia en el punto más bajo del conducto o por debajo del mismo, a fin de no tener "alturas" negativas.

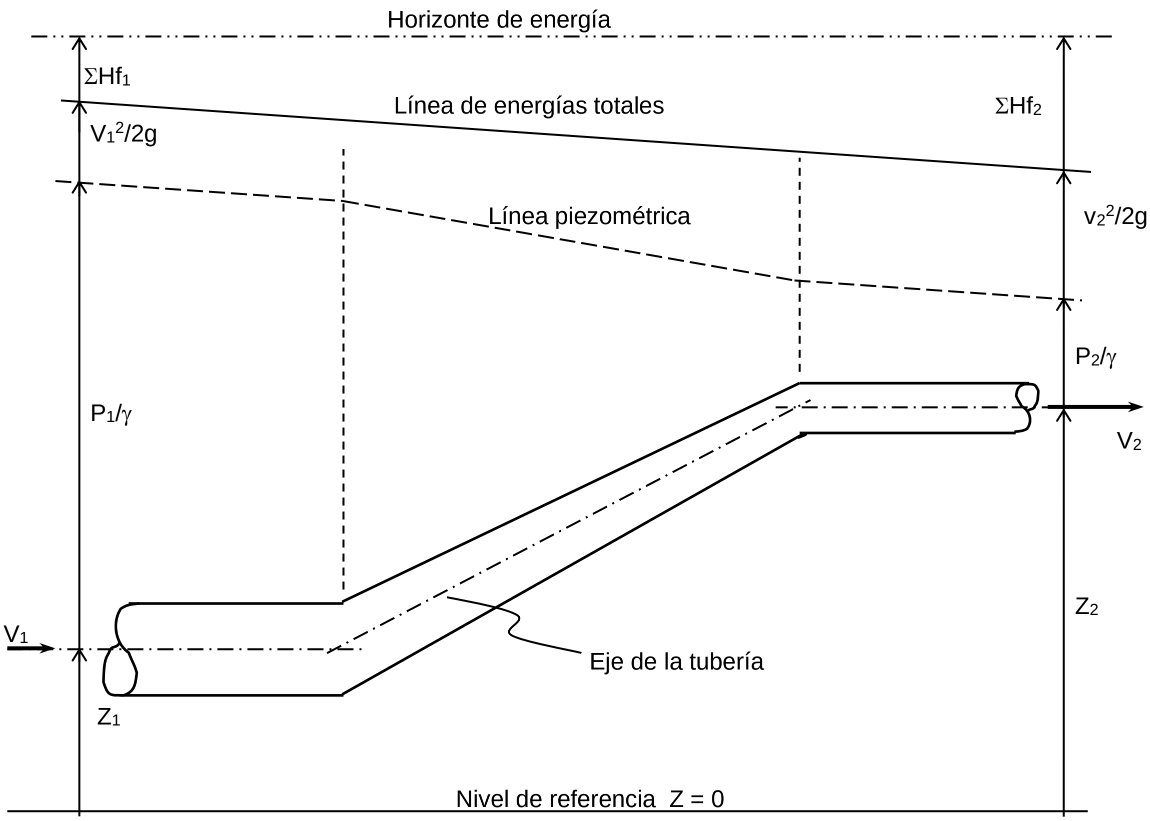
La altura o carga de presión $\boldsymbol{P / \gamma}$ *es la distancia vertical que va desde el eje de la tubería hasta la línea piezométrica*, que como ya habíamos explicado se define por los niveles de los meniscos en sucesivos tubos piezométricos, que estuviesen colocados a lo largo de la tubería. *En el caso de los canales, la carga o altura de presión va desde el fondo del canal hasta la superficie libre del agua o líquido*. Por lo cual, *en canales, la línea piezométrica coincide con la superficie libre del líquido.*

La altura o carga de velocidad $\boldsymbol{v^2/2g}$ *es la distancia vertical que va desde la línea piezométrica hasta la línea de energías totales*. En el caso de los canales, la línea de energías totales se encuentra por encima de la superficie libre del líquido.

La distancia vertical medida desde el nivel de referencia hasta la ***línea de energías totales*** *representa la carga o suma de energías H* en cada sección. *En un fluido ideal la línea de energías totales es horizontal*, debido a que la suma de energías se mantiene constante y solo ocurren transformaciones de una energía en otra sin variar el total.

Obsérvese que en los tramos donde la tubería es horizontal y de sección constante, las líneas de energía son horizontales y las variables o parámetros de la Ec. de Bernoulli: la posición, la presión y la velocidad, permanecen constantes. En el tramo en que la tubería está inclinada, además, presenta una disminución de diámetro, esto ocasiona que se pierda energía de presión por dos motivos: por aumento de la posición y por aumento de velocidad, ya que, de acuerdo con la ecuación de continuidad, al disminuir el área aumenta la velocidad.

En un fluido real*, la línea de energías totales presenta una inclinación en el sentido del flujo*, ya que la cantidad total de energía va disminuyendo debido a que parte de ella se utiliza para vencer la resistencia al movimiento, ocasionada por la viscosidad del fluido.



Líneas de energía para una tubería que conduce un líquido real

La distancia vertical entre la línea de energías totales y el ***horizonte de energía*** representa las pérdidas de energía acumuladas ΣHf hasta esa sección.

Las pérdidas dependen de la viscosidad del fluido, de la energía específica de velocidad del flujo y de algunas características del conducto como diámetro, rugosidad de las paredes y longitud. En algunos casos se plantea la siguiente ecuación:

$$\Sigma Hf = K\, v^2/2g$$

Para denotar que las pérdidas son directamente proporcionales a la energía específica de velocidad. En el coeficiente K se encuentran considerados la viscosidad, el diámetro, la rugosidad y la longitud. La manera de determinar el valor de K es tema de estudio del siguiente capítulo.

El ***horizonte de energía*** es *una línea horizontal que pasa por el punto de mayor energía del sistema*. En el dibujo está trazada a una altura arbitraria debido a que no se conoce el punto de mayor energía

Nótese que en los tramos donde el diámetro es constante las líneas piezométrica y de energías totales son paralelas debido a que la energía específica de velocidad $v^2/2g$ permanece constante. También se puede observar el aumento de altura de velocidad, conforme el diámetro se va reduciendo.

Para un ***fluido real*** la Ec. de Bernoulli incluye el término, correspondiente a las pérdidas de energía ΣHf_{1-2}

En forma resumida la ecuación de Bernoulli para un fluido real queda:

$$\Sigma \mathbf{H_1} - \Sigma \mathbf{Hf_{1-2}} = \Sigma \mathbf{H_2} \qquad 4.14$$

Es decir: ***la suma de energías específicas que se tiene al inicio de un proceso, menos las pérdidas de energía ocurridas durante éste, es igual a la suma de energías específicas al final del mismo*.**

También podemos pasar ΣHf_{1-2} al segundo miembro quedando:

$$\Sigma H_1 = \Sigma H_2 + \Sigma Hf_{1-2} \qquad 4.15$$

O en forma extendida

$$P_1 / \gamma + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = P_2 / \gamma + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Sigma Hf_{1-2} \qquad 4.16$$

A la relación o cociente de las pérdidas correspondientes a un tramo ΔHf*, entre la longitud de dicho tramo* ΔL *se le llama* ***pendiente hidráulica*** S_H

$$S_H = \Delta Hf / \Delta L \qquad 4.17$$

Que *es la pendiente de la línea de energías totales*. Cuando la sección de la tubería sea constante, lo que ocurre en la mayoría de los casos, la línea piezométrica es paralela a la línea de energías totales y por lo tanto su pendiente es la misma.

En muchas aplicaciones prácticas de tuberías, la energía de velocidad es muy pequeña comparada con la energía de presión, por lo que a veces no se toma en cuenta. En estas condiciones solo se dibuja la línea piezométrica. Sin embargo, debemos tener presente que solo es una simplificación para fines de cálculo y que en la realidad la energía específica de velocidad está presente. Esta simplificación no la usaremos en este curso.

Procedimiento de aplicación de la ecuación de Bernoulli.

En la mayoría de los problemas y ejercicios usaremos el siguiente procedimiento de análisis:

1.- Dibujar un esquema del conducto marcando las secciones transversales que se van a estudiar, así como las diversas líneas de energía: El nivel horizontal de referencia NHR, el eje de la tubería o el fondo del canal, la línea piezométrica y la línea de energías totales.

2.- Aplicar la ecuación de Bernoulli en sentido del flujo. El nivel de referencia debe colocarse en el punto más bajo del conducto, o más abajo, para evitar tener energías negativas.

3.- Dado que la ecuación de Bernoulli tiene seis variables, debe aplicarse con cuidado de manera que no se generen demasiadas incógnitas; es decir, para aplicar Bernoulli debemos escoger aquellas secciones en donde conozcamos el valor de la mayor cantidad posible de variables. Estas secciones son:

i) ***La superficie libre del líquido dentro de un tanque abierto a la atmósfera*** en donde sale o a donde llega una tubería. En este caso la única energía es la de posición que es igual a la cota de la superficie libre, la presión es igual a la atmosférica (cero relativo) y la velocidad se considera cero para cumplir la hipótesis de flujo permanente. Para cumplir esta hipótesis se supone que el tanque es muy grande en comparación con el gasto que se le extrae mientras dura la observación, o bien que se le suministra el mismo gasto que se le extrae. Si hubiera alguna velocidad (vertical) de la superficie libre significaría que el tanque se estaría llenando o vaciando, y el flujo no sería permanente.

ii) ***Un chorro descargando libre a la atmósfera*.** Tiene energía de posición, la cota del eje del chorro, y energía de velocidad. La energía de presión es conocida por estar a presión atmosférica

iii) ***Secciones donde existan medidores*.** Estos pueden ser manómetros de carátula, de columna de líquido o diferenciales, piezómetros, tubos de Pitot u otros velocímetros.

iv) ***Secciones en donde confluyan o se bifurcan varios ramales*.** En estos puntos la energía específica es la misma para todos los ramales, aunque los gastos sean diferentes. La razón es bastante obvia si reflexionamos en que la energía específica es la energía por unidad de peso, es decir cada kilogramo de líquido tiene la misma energía, aunque circulen diferentes cantidades de masa por los distintos ramales.

4.- Es común aplicar la ecuación de Bernoulli simultáneamente con la ecuación de continuidad y la de impulso y cantidad de movimiento. Con estas tres ecuaciones podremos resolver cualquier problema de hidráulica.

Ejemplo 4.1: Teorema de Torricelli

Muchos años antes de que Bernoulli aplicara el principio de conservación de la energía a los movimientos de los fluidos, Torricelli había descubierto en forma experimental un hecho asombroso que no pudo explicar. Torricelli observó que la velocidad con la que un líquido salía por el orificio hecho en un tanque, era prácticamente igual a la velocidad de caída libre de un objeto que se dejara caer, desde una altura igual a la que tenía la superficie libre del líquido dentro del tanque:

Torricelli descubrió que la velocidad con la que sale un chorro de líquido, por el orificio de un tanque Vs es igual a la velocidad de caída libre de un cuerpo que se suelta desde el nivel de la superficie libre del líquido.

Demostración:

De las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la velocidad de caída de un cuerpo está dada por:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,g\,(y - y_0)$$

si $v_0 = 0$ y $H = y - y_0$ entonces

$$v = \sqrt{2gH}$$

Aplicando Bernoulli de un punto 1 ubicado en la superficie libre del líquido a un punto 2 en el eje del chorro inmediatamente en la salida del tanque, tenemos:

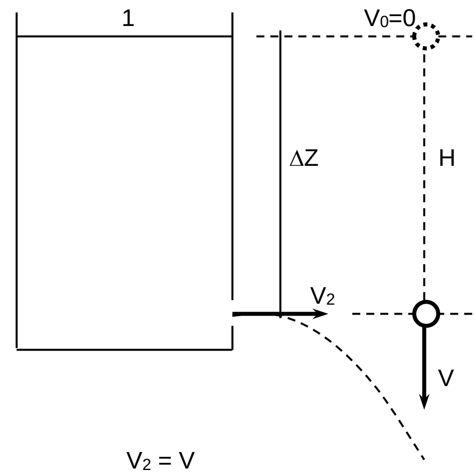
$$P_1/\gamma + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = P_2/\gamma + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Donde $P_1 = P_2 = Patm = 0$ (rel.) y $v_1 = 0$ por ser un flujo permanente

$$0 + Z_1 + 0 = 0 + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

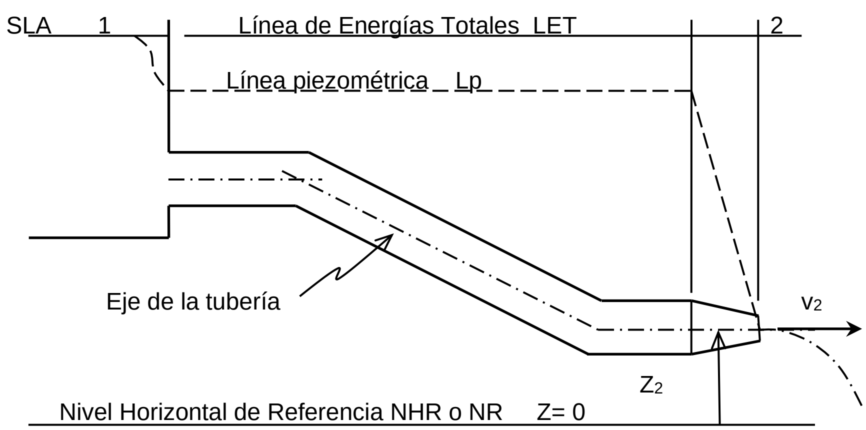
Despejando

$$v_2 = \sqrt{2g(Z_1 - Z_2)}$$



El motivo de esta semejanza, es que el principio de conservación de la energía, se cumple en los dos fenómenos

Ejemplo 4.2. Por la tubería mostrada fluye agua. Suponiendo fluido ideal con flujo permanente, calcular el gasto cuando A) $Z_1 = 13$ m; B $Z_1 = 23$ m; C) $Z_1 = 33$m. En todos los casos $Z_2 = 3$ m, el diámetro de la tubería es de 10 cm y el de la boquilla 5 cm.



Solución: Escogemos la sección 1 en la superficie libre del agua SLA del tanque, ahí la presión es la atmosférica P_1= 0 (rel), v_1= 0 por ser flujo permanente y la única energía específica es la de posición z_1.
La sección 2 la escogemos en el chorro a la salida de la boquilla, donde la presión también es la atmosférica P_2 =0 (rel), y existe la energía específica de posición y velocidad

Dentro del tanque en la zona cercana a la entrada a la tubería, las partículas de líquido empiezan a aumentar de velocidad y por ello la línea piezométrica se separa de la superficie libre del agua. Obsérvese que esa separación representa a la energía específica de velocidad.

A) Aplicando Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$0+Z_1+0=0+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\sqrt{2g(Z_1-Z_2)}$$

$$v_2=\sqrt{2(9.81)(13-3)}=14.00\ {}^{m}/_{s}$$

Por definición de gasto

$$Q=A_2v_2=\frac{\pi}{4}D_2^2v_2=\frac{\pi}{4}(0.05)^2(14)$$

$$Q=0.0275\ \frac{m^3}{s}=27.5\frac{lt}{s}$$

B) Aplicando Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}+$$

$$0+Z_1+0=0+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}+$$

$$v_2=\sqrt{2g(Z_1-Z_2)}$$

$$v_2=\sqrt{2(9.81)(23-3)}=19.81\ {}^{m}/_{s}$$

Por definición de gasto

$$Q=A_2v_2=\frac{\pi}{4}D_2^2v_2=\frac{\pi}{4}(0.05)^2(19.81)$$

$$Q=0.0389\ \frac{m^3}{s}=38.9\frac{lt}{s}$$

C) Aplicando Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$0+Z_1+0=0+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2=\sqrt{2g(Z_1-Z_2)}$$

$$v_2=\sqrt{2(9.81)(33-3)}=24.26\ {}^{m}/_{s}$$

Por definición de gasto

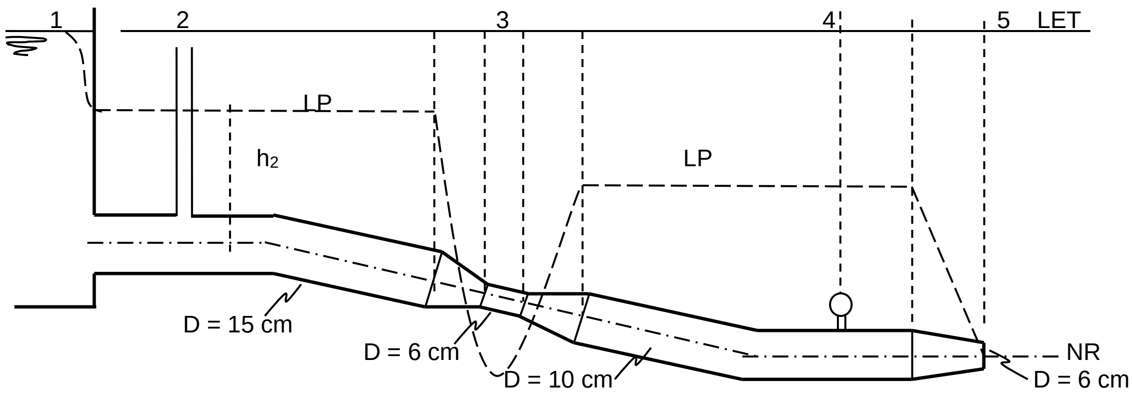
$$Q=A_2v_2=\frac{\pi}{4}D_2^2v_2=\frac{\pi}{4}(0.05)^2(24.26)$$

$$Q=0.0476\ \frac{m^3}{s}=47.6\frac{lt}{s}$$

Como podemos observar tanto la velocidad como el gasto aumentan con la diferencia de altura entre la salida y el tanque. El motivo es que al aumentar la diferencia de altura aumenta la energía disponible para mover al fluido.

Otro aspecto interesante para analizar es: ¿En qué partes de la tubería aumenta la velocidad y por qué?

Ejemplo 4.3. Por la tubería mostrada circula petróleo crudo Dr = 0.85. Con los datos suministrados y suponiendo un fluido ideal, Calcular: A) el gasto. B) la lectura en el piezómetro. C) La presión y la velocidad en la contracción. D) La lectura del manómetro en kg/cm^2.
Z_1 = 11 m; Z_2 = 7 m; Z_3= 3 m; Z_4 = Z_5= 0.



Solución:

Bernoulli de 1 a 5

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_5}{\gamma}+Z_5+\frac{v_5^2}{2g}$$

$$0+Z_1+0=0+0+\frac{v_5^2}{2g}$$

$$v_5=\sqrt{2g(Z_1)}=\sqrt{2(9.81)(11)}=14.69\frac{m}{s}$$

$$A_{15}=\frac{\pi}{4}0.15^2=0.0177\,m^2$$

$$A_{10}=\frac{\pi}{4}0.10^2=0.0079\,m^2$$

$$A_6=\frac{\pi}{4}0.06^2=0.0028\,m^2$$

$$Q_5=A_5v_5=0.0028(14.69)=0.0415\frac{m^3}{s}$$

Por continuidad $Q_5=Q_2=Q_3=Q_4$

De la Def. de gasto $Q=Av$; $v_i=\frac{Q_i}{A_i}$

$$v_{15}=\frac{Q}{A_{15}}=\frac{0.0415}{0.0177}=2.344\frac{m}{s}=v_2$$

$$v_{10}=\frac{Q}{A_{10}}=\frac{0.0415}{0.0079}=5.253\frac{m}{s}=v_4$$

Bernoulli de 1 a 2

$$Z_1=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma}=Z_1-Z_2-\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma}=11-7-\frac{2.344^2}{2(9.81)}=3.71\,m=h_2$$

Que es la altura en el piezómetro.

Bernoulli de 1 a 3

$$Z_1=\frac{P_3}{\gamma}+Z_3+\frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{P_3}{\gamma}=Z_1-Z_3-\frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{P_3}{\gamma}=11-3-\frac{14.69^2}{2(9.81)}=-2.99\,m=h_3$$

$$P_3=\gamma h_3=850(-2.99)=-2549\frac{kg}{m^2}$$

Obsérvese que la línea piezométrica pasa por debajo del eje en el tramo donde la presión es negativa

Bernoulli de 1 a 4

$$Z_1=\frac{P_4}{\gamma}+\frac{v_4^2}{2g}$$

$$\frac{P_4}{\gamma}=Z_1-\frac{v_4^2}{2g}$$

$$\frac{P_4}{\gamma}=11-\frac{5.523^2}{2(9.81)}=9.59\,m$$

$$P_4=\gamma h_4=850(9.59)=8154\frac{kg}{m^2}$$

$$P_4=8154\frac{kg}{m^2}\left(\frac{1m}{100cm}\right)^2=0.81\frac{kg}{cm^2}$$

Que es la lectura en el manómetro

Ejemplo 4.4. Cuál es el nivel de la línea piezométrica en la sección 2 cuando circulan 60 lt/s de gasolina. D_1 = 200 mm, D_2 = 120 mm.

Solución: Observando la figura, del piezómetro en 1:

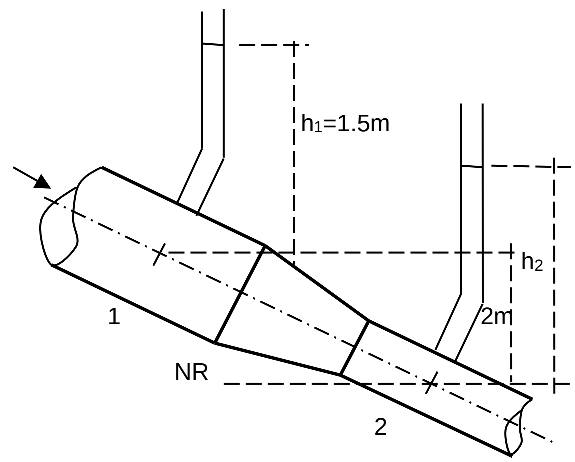
$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma} = 1.5\ m$$
$$h_2 = \frac{p_2}{\gamma} = ?$$
$$Z_1 = 2\ m$$
$$Z_2 = 0\ m$$
$$Q = Av = \frac{\pi}{4}D^2 v$$
$$v = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4(0.06)}{\pi 0.2^2} = 1.91\frac{m}{s}$$
$$v_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4(0.06)}{\pi 0.12^2} = 5.30\frac{m}{s}$$

Aplicando Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$1.5 + 2 + \frac{1.91^2}{2(9.81)} = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + \frac{5.30^2}{2(9.81)}$$



$$1.5 + 2 + 0.186 = \frac{P_2}{\gamma} + 0 + 1.43$$
$$\frac{P_2}{\gamma} = h_2 = 2.254\ m$$

Nótese que no fue necesario usar el peso específico de la gasolina, porque la energía de presión la manejamos como altura. ¿Cuánto vale la presión en 2?

Ejemplo 4.5. Por el codo reductor mostrado fluye petróleo crudo Dr = 0.86, calcular el gasto si el manómetro diferencial marca H = 435mm. D_1 = 300 mm; D_2 = 200 mm. El líquido manométrico es mercurio.

Solución: Resolviendo el manómetro diferencial:

$$P_1 - \gamma_p X - \gamma_{Hg} H + \gamma_p Y = P_2$$

$$\gamma_p (Y - X) - \gamma_{Hg} H += P_2 - P_1$$

$$P_2 - P_1 = 860(Y - X) - 13560(0.435)$$

$$P_2 - P_1 = 860(Y - X) - 5898.6 \qquad (1)$$

Por geometría de la figura

$$X + H - Y = Z_2 - Z_1$$

$$X - Y = Z_2 - Z_1 - H$$

Multiplicando por –1

$$Y - X = -(Z_2 - Z_1) + 0.435 \qquad (2)$$

Sust 2 en 1

$$P_2 - P_1 = 860(-(Z_2 - Z_1) + 0.435) - 5898.6$$

$$P_2 - P_1 = -860(Z_2 - Z_1) + 374.1 - 5898.6$$

$$P_2 - P_1 = -860(Z_2 - Z_1) - 5524.5 \qquad (1')$$

Por Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma} - \frac{P_1}{\gamma} + Z_2 - Z_1 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$(P_2 - P_1)\frac{1}{\gamma} + Z_2 - Z_1 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0 \qquad (3)$$

Sust. 1' en 3

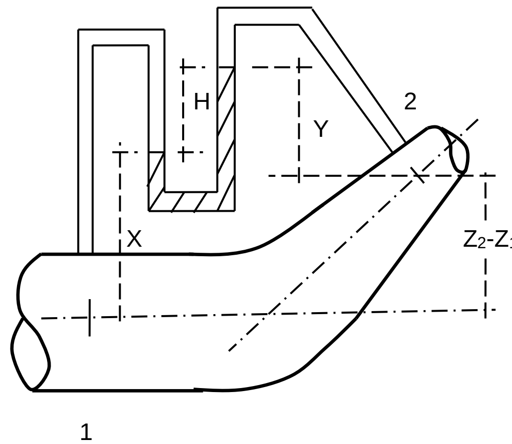
$$(-860(Z_2 - Z_1) - 5524.5)\frac{1}{860} + Z_2 - Z_1 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$-(Z_2 - Z_1) - 6.42 + (Z_2 - Z_1) + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$-6.42 + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = 0$$

$$-6.42 + (v_2^2 - v_1^2)\frac{1}{19.62} = 0$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 6.24(19.62) = 126.035 \qquad (4)$$



Por continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2$$

$$v_1 = \frac{D_2^2 v_2}{D_1^2} \qquad (5)$$

Sust en 5 en 4

$$v_2^2 - \left(\frac{D_2^2 v_2}{D_1^2}\right)^2 = 126.035$$

$$v_2^2 - \frac{D_2^4}{D_1^4} v_2^2 = 126.035$$

$$v_2^2 - \frac{0.2^4}{0.3^4} v_2^2 = 126.035$$

$$v_2^2 - \frac{0.0016}{0.0081} v_2^2 = 126.035$$

$$v_2^2 - 0.1975 v_2^2 = 126.035$$

$$0.8025 v_2^2 = 126.035$$

$$v_2 = 12.53\ \frac{m}{s}$$

Por gasto

$$Q = A_2 v_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 v_2 = \frac{\pi}{4}(0.2^2)(12.53)$$

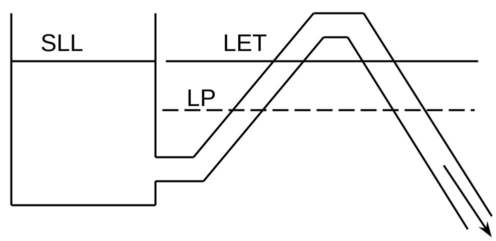
$$Q = 0.3937 \frac{m^3}{s}$$

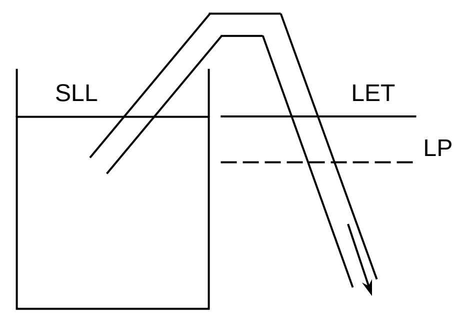
Presión de vapor y Cavitación.

Como habíamos mencionado anteriormente es posible la formación de ***burbujas de vapor*** o ***cavidades*** dentro de un flujo, debido a una disminución de la presión lo suficientemente grande como para alcanzar la ***presión de vapor***. Esto puede producir problemas en las instalaciones hidráulicas, que pueden ir desde la formación de flujos mixtos líquido-vapor, la obturación o taponamiento de tuberías por la burbuja de vapor, hasta la destrucción de piezas importantes (y costosas), como los alabes de una turbina o del impulsor de una bomba, por la erosión que se produce asociada a la ***cavitación***. *Por ello es necesario revisar que, en las zonas de alta velocidad y baja presión, ésta no disminuya tanto como para alcanzar la presión de vapor.* Se sugiere estudiar lo tratado sobre ebullición, presión de vapor y cavitación en el capítulo 3 "Propiedades físicas de los fluidos"

Sifón.

*Un **sifón** es una tubería que presenta un tramo que pasa por encima de la superficie libre del líquido, o mejor dicho, por encima de la línea piezométrica, en consecuencia, presenta una zona o tramo donde la presión es negativa* por efecto del aumento de la posición de ese tramo de tubería. La salida debe estar, al igual que cualquier tubería que trabaje por gravedad, más abajo que la superficie libre del agua.

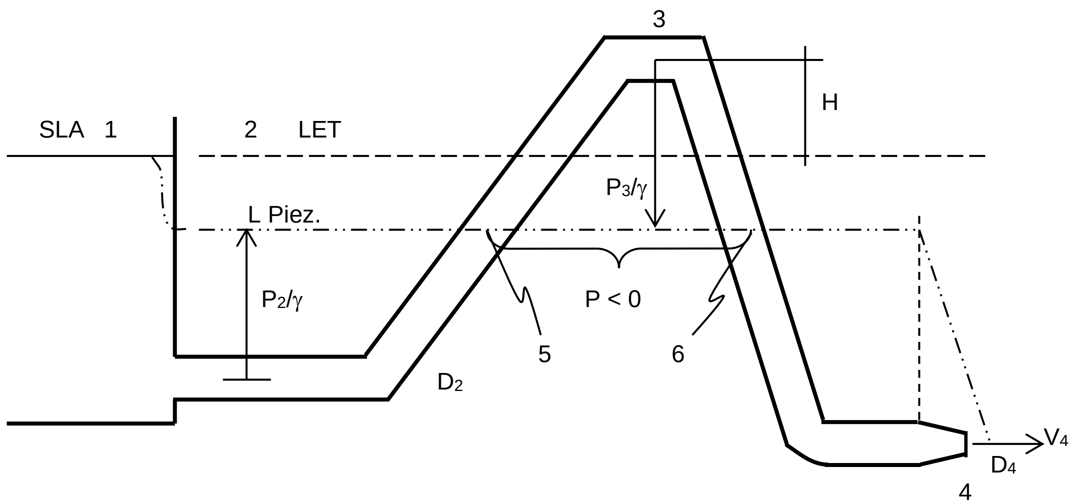




Sifones: un tramo de la tubería pasa por arriba de la Línea Piezométrica. Nótese que en ambos casos la salida de la tubería está por debajo de la superficie libre de líquido, ya que trabajan por gravedad.

En la tubería de un sifón el líquido, por sí mismo, solo llegará al nivel de la superficie libre antes de la parte alta, para que el líquido pueda rebasar la parte alta y se produzca el flujo es necesario vaciar el aire dentro de la tubería, lo cual puede hacerse de dos maneras: succionándolo, como hacemos cuando con una manguera se le saca gasolina al tanque de un auto, o llenando la tubería del líquido en cuestión, en cualquier caso una vez que el agua fluye, el sifón continúa funcionando por sí mismo siempre y cuando no le entre aire o no se forme un tapón de vapor en el punto más alto, esto ocurre si subimos demasiado el punto más alto, de manera que la presión llegue a la presión de vapor.

Ejemplo 4.6. En el sifón mostrado se desea calcular el gasto y la altura máxima H a la cual puede subirse la tubería en la sección 3. Fluye agua, el barómetro marca 101 kPa y la presión de vapor es la que corresponde a 20 °C: P_v= 2.34 kPa; además Z_1 = 15 m; Z_2 = 6 m; Z_4 = 0 m; D_2 = D_3 = 10 cm y D_4 = 5 cm.



Solución 4.6:
De la figura observamos que, en el tramo horizontal de la tubería, la presión es positiva y se mide del eje de la tubería a la línea piezométrica. En el tramo inclinado, la presión disminuye conforme la posición aumenta; es decir, conforme la tubería sube, hasta que llega un punto donde la presión vale cero, justo donde se cruza la línea piezométrica con el eje de la tubería (sección 5) como la tubería continúa subiendo, la presión continúa disminuyendo (P abs.) o se va haciendo más negativa (P rel.) hasta que en el punto más alto de la tubería (sección 3) se alcanza la menor presión (abs.) si esta llega a igualar a la presión de vapor P_V, se formarán pequeñas burbujas, que al acumularse formarán una gran burbuja que ocupará toda la sección de la tubería y el flujo se suspenderá; por ello es necesario determinar la altura H a la cual $P_3 = P_V$ y construir el sifón con una H menor.
Aplicando Bernoulli de 1 a 4

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_4}{\gamma} + Z_4 + \frac{v_4^2}{2g}$$

Dónde: $P_1 = P_4 = P_{ATM} = 101$ kPa; $v_1 = 0$; $Z_4 = 0$

(Continúa en la sig pag.)

Por continuidad: el gasto es el mismo en cualquier sección, entonces

$$v_3 = \frac{4Q}{\pi D_3^2} = \frac{4(0.0337)}{\pi 0.1^2} = 4.29\,\frac{m}{s}$$

Aplicando Bernoulli de 1 a 3

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} + Z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

Cuando $P_3 = P_V$ estará empezando la cavitación (cavitación incipiente) y Z_3 será máxima

$$\frac{101000}{9810} + 15 + 0 = \frac{2340}{9810} + Z_3 + \frac{4.29^2}{2(9.81)}$$
$$10.295 + 15 + 0 = 0.238 + Z_3 + 0.938$$

$$Z_3 = 24.119\ m$$

$$H = Z_3 - 15 = 9.119\,m$$

De manera que, para prevenir la cavitación a esta temperatura, Z_3 debe ser menor que 24.12 m o lo que es lo mismo, una H menor que 9.12 m.
Si queremos asegurar el funcionamiento bajo cualquier condición, se debería revisar la altura H para una temperatura mayor

$$Z_1 = \frac{v_4^2}{2g}$$ $$v_4 = \sqrt{2gZ_1} = \sqrt{2(9.81)(15)} = 17.155\frac{m}{s}$$ $$Q = A_4 v_4 = \frac{\pi}{4}D_4^2 v_4 = \frac{\pi}{4}0.05^2(17.155)$$ $$Q = 0.0337\frac{m^3}{s}$$		(50°C por ejemplo) y sobre el resultado aplicar un factor de seguridad.

Ejemplo 4.7. Por el tramo de tubería mostrado fluye agua. ¿Cuál será el régimen de flujo que circula cuando el manómetro marca 130 kPa si en la contracción se observa cavitación? El barómetro indica 720 mm de Hg, la temperatura es de 30°, D_1=100 mm y D_2 = 50 mm

Solución:

Si en 2 hay cavitación, la presión en ese punto será la de vapor, entonces utilizaremos presiones absolutas en el MKS Abs.

$$P_{AT} = \gamma_{Hg} h = Dr_{Hg}\gamma_{ag} h$$

$$P_{AT} = 13.56(9810)0.72 = 95777\frac{N}{m^2}$$

P_1 absoluta

$$P_1 = P_{1Man} + P_{At}$$

$$P_1 = 130{,}000 + 95777 = 225{,}777\ Pa\ (Abs)$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{225777}{9810} = 23.01\ m$$

De tablas encontramos la P_V

$$P_V = P_2 = 4.24\ kPa\ (Abs)$$

$$\frac{P_V}{\gamma} = \frac{4240}{9810} = 0.43\ m$$

Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

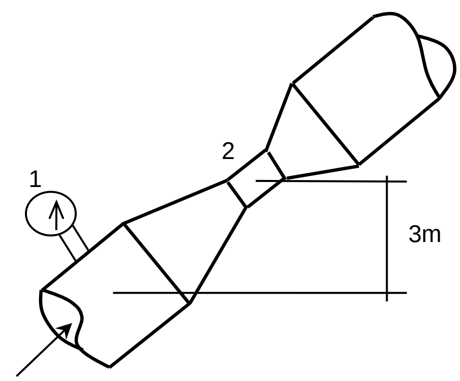
$$23.01 + 0 + \frac{v_1^2}{2g} = 0.43 + 3 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$19.58 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$$

Multiplicando todo por 2g

$$(19.58)2g + v_1^2 = v_2^2$$

$$384.16 + v_1^2 = v_2^2 \qquad \boxed{1}$$



Por Continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{\pi}{4}D_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4}D_2^2 v_2$$

$$D_1^2 v_1 = D_2^2 v_2$$

$$0.1^2 v_1 = 0.05^2 v_2$$

$$v_1 = \frac{0.05^2}{0.1^2} v_2 = 0.25 v_2 \qquad \boxed{2}$$

Sust. 2 en 1

$$384.16 + (0.25v_2)^2 = v_2^2$$

$$384.16 = 0.937 v_2^2$$

$$v_2 = 20.24\ {}^{m}/_{s}$$

El régimen de flujo será:

$$Q = A_2 v_2 = \frac{\pi}{4}D_2^2 v_2$$

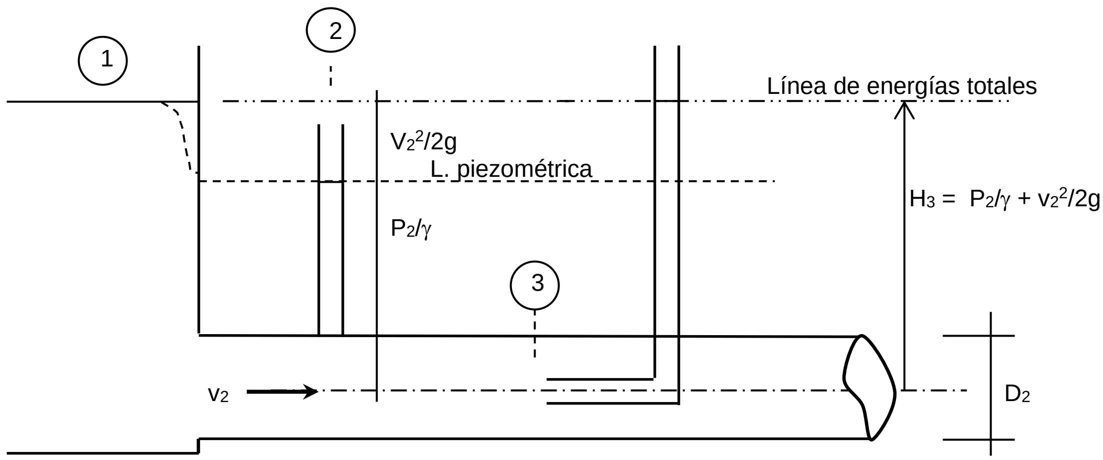
$$Q = \frac{\pi}{4}0.05^2(20.24) = 0.0397\frac{m^3}{s}$$

Y la velocidad en 1

$$v_1 = 0.25 v_2 = 0.25(20.24) = 5.06\ m/s$$

Tubo de Pitot.

Ya habíamos mencionado que el tubo de Pitot es un dispositivo que permite visualizar el nivel de la línea de energías totales correspondiente a la sección en donde está colocado



Tubo de Pitot para ver y medir la altura de velocidad

De la figura se desprende que la altura alcanzada por el líquido dentro del tubo de Pitot H_3 es

$$H_3 = P_2/\gamma + v_2^2/2g \qquad 4.14$$

Debemos notar que los valores de presión y velocidad en esta expresión son los de la tubería, es decir los de una sección 2 cualquiera en la que el diámetro es $D_2 = D_3 =$ cte. y la velocidad y la presión también lo son.

Sin embargo, 3, a diferencia de 2, es un punto, no una sección. 3 es el punto justo enfrente de la entrada al tubo de Pitot y carece de velocidad, de lo contrario el nivel dentro del tubo de Pitot seguiría subiendo; por este motivo se le llama ***punto de estancamiento***, y a la presión que ahí existe ***presión de estancamiento P_S.*** De manera que la columna de líquido dentro del tubo de Pitot, de altura H_3 genera una presión que es igual a $P_S = P_3$

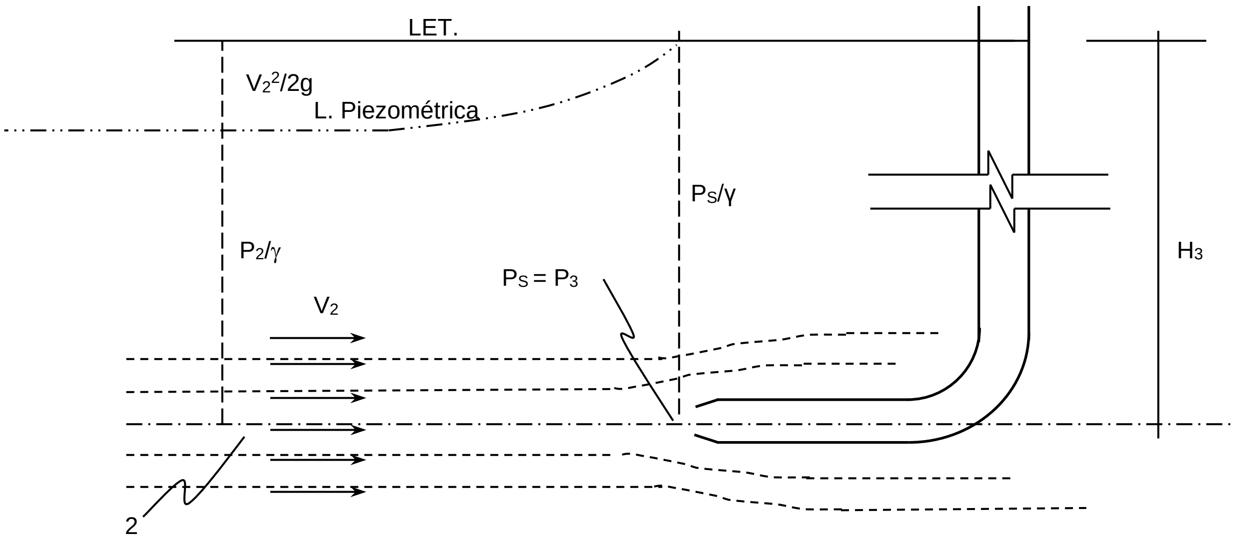
$$P_S = P_3 = \gamma H_3 \qquad 4.15$$

Entonces

$$H_3 = P_S/\gamma \qquad 4.16$$

Dicho de otra forma, si analizamos la línea de corriente que se encuentra justo frente al tubo de Pitot nos damos cuenta que en la sección 2 a una distancia considerable de la entrada al tubo de Pitot hay energía específica de presión y velocidad; sin embargo al irnos acercando a la entrada del tubo de Pitot (sobre la línea de corriente justo enfrente de la entrada) ***la energía específica de velocidad se va transformando en energía específica de presión*** de manera que al llegar a la entrada, en el punto 3, el flujo se frena completamente y solo existe energía de presión. Consecuentemente ***la línea piezométrica correspondiente a la línea de***

corriente, justo frente al punto de estancamiento, se eleva hasta alcanzar la línea de energías totales.



La piezométrica de la línea de corriente frente al tubo de Pitot se eleva hasta alcanzar a la línea de energías totales

Sustituyendo 4.16 en 4.14

$$P_S/\gamma = P_2/\gamma + v_2^2/2g \qquad 4.17$$

Esta misma expresión la obtendríamos si aplicáramos Bernoulli *del punto 2 al punto 3 a lo largo de la línea de corriente.*
Veamos: dado que $Z_2 = Z_3$ y $v_3 = 0$

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} = \frac{P_S}{\gamma} \qquad 4.17'$$

Dividiendo entre γ para expresarlo como presiones tenemos

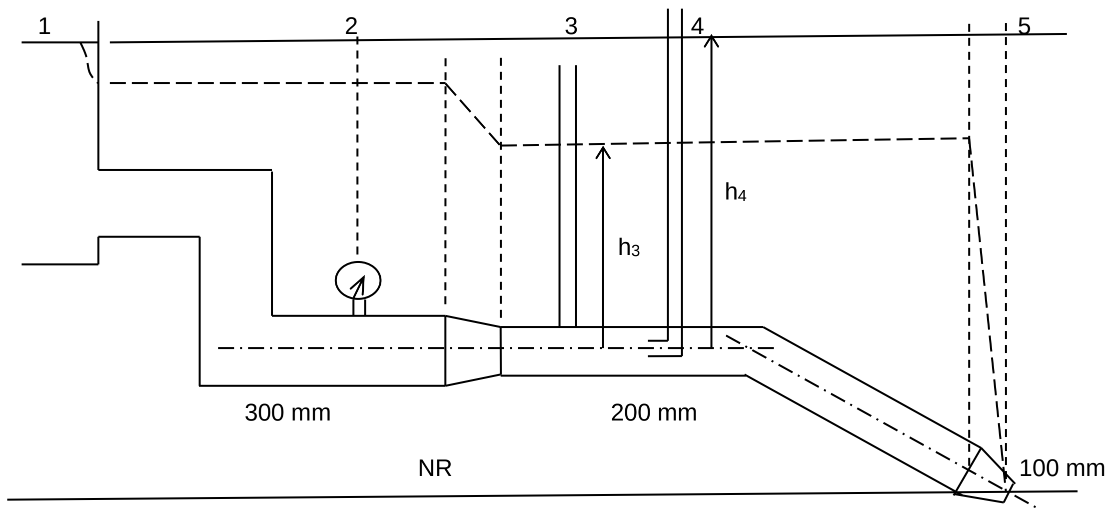
$$P_3 = P_S = P_2 + \gamma\, v_2^2/2g \qquad 4.18$$

Como $\gamma = \rho\, g$, $\gamma / g = \rho$, entonces

$$P_S = P_2 + \rho\, v_2^2/2 \qquad 4.19$$

Las ecuaciones 4.14, 4.17, 4.18 y 4.19 permiten resolver un tubo de Pitot y relacionar su lectura H_3 con lo que ocurre dentro de la tubería principal.

Ejemplo 4.8. Un tanque de almacenamiento alimenta de agua a una tubería como la mostrada. Calcular la velocidad de salida, la presión en el manómetro y el nivel del agua dentro del piezómetro y el tubo de Pitot. Z_1 = 38 m; Z_2= Z_3= Z_4= 12m; Dibuja las líneas de energía



Solución:

Bernoulli de 1 a 5

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_5}{\gamma}+Z_5+\frac{v_5^2}{2g}$$

$$0+Z_1+0=0+0+\frac{v_5^2}{2g}$$

$$v_5=\sqrt{2gZ_1}=\sqrt{2(9.81)(38)}=27.30\frac{m}{s}$$

$$Q=A_5v_5=\frac{\pi}{4}D_5^2v_5=0.214\frac{m^3}{s}$$

Por continuidad el gasto es el mismo en todas las secciones

$$v_2=\frac{4Q}{\pi D_2^2}=\frac{4(0.214)}{\pi 0.3^2}=3.03\frac{m}{s}$$

$$v_3=\frac{4Q}{\pi D_3^2}=\frac{4(0.214)}{\pi 0.2^2}=6.83\frac{m}{s}$$

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{3.03^2}{2(9.81)}=0.468\,m$$

$$\frac{v_3^2}{2g}=\frac{6.83^2}{2(9.81)}=2.378\,m$$

Bernoulli de 1 a 2

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+Z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{\gamma}=Z_1-Z_2-\frac{v_2^2}{2g}=38-12-0.468$$

$$\frac{P_2}{\gamma}=25.53\,m$$

$$P_2=\gamma h=9810(25.53)=250.4\,kPa$$

Bernoulli de 1 a 3

$$\frac{P_1}{\gamma}+Z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_3}{\gamma}+Z_3+\frac{v_3^2}{2g}$$

$$\frac{P_3}{\gamma}=Z_1-Z_3-\frac{v_3^2}{2g}=38-12-2.378$$

$$\frac{P_3}{\gamma}=h_3=23.62\,m$$

En el punto de estancamiento del tubo de Pitot:

$$h_4=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}$$

$$h_4=23.62+2.378=26\,m$$

Lo cual es lógico, ya que

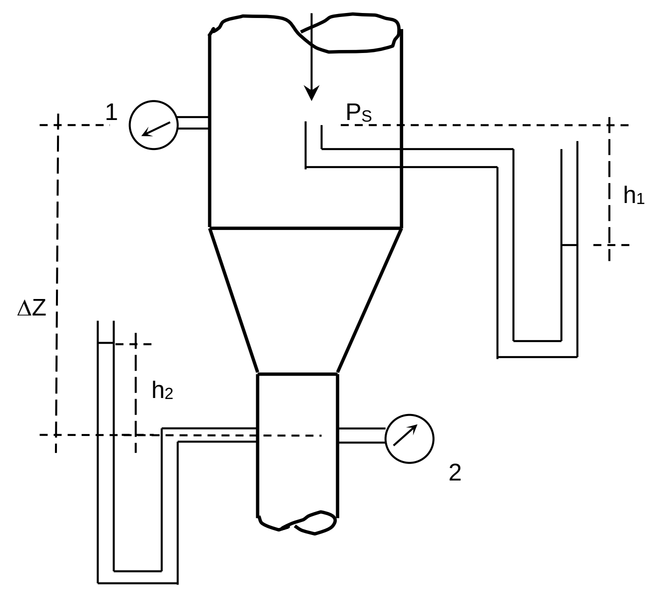
$$h_4+Z_4=Z_1$$

Ejemplo 4.9. Calcular el régimen de flujo y las lecturas de los medidores. Fluye aceite.
Datos: Densidad relativa del aceite $Dr_A = 0.85$; $D_1 = 14”$; $D_2 = 7”$; $h_1 = 0.7$ m ; $h_2 = 0.8$ m ; $\Delta Z = 4$ m

Solución:
El régimen de flujo es el gasto Q, y los medidores mostrados en la figura son manómetros de carátula.

$\gamma_{Ac} = Dr_{Ac}\, \gamma_{Ag} = 0.85\ (1000) =$ 850 Kg/ m^3
$D_1 = 14” = 14(2.54) = 35.56$ cm
$D_2 = 7” = 7(2.54) = 17.78$ cm

Con el manómetro 2 se puede conocer P_2
$Pat + \gamma_A\, h_2 = P_2$ (1)
$0 + 850\ (0.8) = P_2$
$P_2 = 680$ Kg/m^2
$P_2 / \gamma_A = 680 / 850 = 0.8$ m



Resolviendo el medidor 1 como manómetro
$P_S + h_1\, \gamma_A = Pat = 0$ rel (2)
$P_S = - 0.7\ (850) = - 595$ Kg/m^2

Por la Ec. del T. Pitot
$P_S / \gamma_{Ac} = P_1 / \gamma_G + v_1^2/2g$ (3)
$P_S / \gamma_{Ac} = -595 / 850$
$P_1 / \gamma_{Ac} + v_1^2/2g = -0.7$ (3’)

Por Bernoulli de 1 a 2 (4)
$Z_1 + P_1 / \gamma_A + v_1^2/2g = Z_2 + P_2 / \gamma_A + v_2^2/2g$

Si $Z_2 = 0$ entonces $Z_1 = 4$ m, Sust.

$4 - 0.7 = 0 + 0.8 + v_2^2/2g$

$v_2^2/2g = 2.5$ m

$v_2 = 7$ m/s
por definición de gasto
$Q = A_2\, v_2 = \Pi/4\ (D_2^2)\ v_2 = \Pi/4\ (0.1778)\ 7$
$Q = 0.1738$ m^3/s

$v_1 = Q / A_1 = 4\ Q / \Pi\ D_1^2$
$v_1 = 4\ (0.1738) / \Pi\ (0.3556)^2 = 1.75$ m/s

Sust. En (3’)

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{1.75^2}{2(9.81)} = -0.7$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = -0.156 - 0.7 = -0.856\ m$$

$$P_1 = -727.6\ kg/m^2$$

Nótese que son 4 las ecuaciones usadas (más la definición de gasto y continuidad que no se numeraron), También que el tubo de Pitot suministró dos de estas ecuaciones: al resolverlo como manómetro y al involucrar la Ec. (3) del tubo de Pitot.

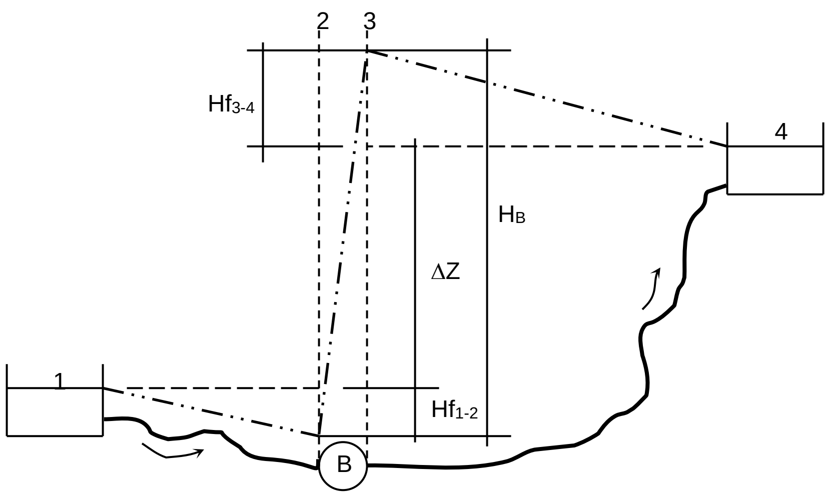
Fuentes de energía.

En las tuberías básicamente existen tres fuentes de energía:
Gravedad: Cuando el líquido fluye de un punto de mayor altura a uno de menor. El flujo ocurre por la diferencia de energía potencial gravitacional.
Bombeo: cuando el flujo se da hacia arriba por el incremento de energía suministrado por una bomba.
Hidroneumático: Cuando el líquido contenido en un tanque cerrado se somete a presión y ésta hace que fluya hasta un nivel superior.

Suministro y extracción de energía a un flujo: Bombas y turbinas.

Una Bomba es un dispositivo mecánico que permite suministrar energía a un flujo.

El efecto de una ***bomba*** en la energía total de un flujo lo podemos esquematizar en la siguiente figura. Aquí se muestran dos tanques unidos por una tubería. Como el segundo tanque está en una cota topográfica mayor que el primero, es necesario instalar una bomba B.



Tubería — B bomba
Línea de energías totales ideal — ΔZ desnivel Topográfico
Línea de energías totales real — Hf Pérdidas de energía
HB Energía específica suministrada por la bomba

Al salir del tanque 1 el nivel de energía es el de la superficie libre del líquido dentro del primer tanque Z_1; sin embargo, conforme el líquido avanza a lo largo del tramo 1-2 va perdiendo energía, de manera que al llegar a la entrada de la bomba (sección 2) el nivel de energía H_2 es menor:

$$H_2 = Z_1 - Hf_{1-2}$$

La bomba toma el líquido con ese nivel de energía y le suministra una cantidad H_B que le permite elevar la línea de energías totales hasta H_3, posteriormente las pérdidas de energía en el tramo 3-4 lleva la línea de energías totales hasta el nivel de la superficie libre del líquido en el segundo tanque (punto 4).

Entonces, la ecuación de Bernoulli en término de energías totales puede escribirse

$$Z_1 – Hf_{1-2} + H_B – Hf_{3-4} = Z_4$$

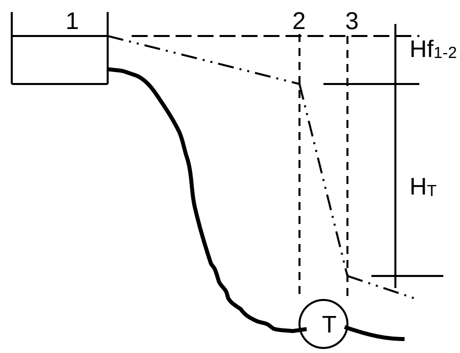
O bien

$$H_B = Hf_{1-2} + Hf_{3-4} + Z_4 – Z_1$$

$$H_B = Hf_{1-2} + Hf_{3-4} + \Delta Z$$

Es decir: ***la energía específica que debe suministrar una bomba es igual al desnivel topográfico más la suma de pérdidas en los conductos de entrada y salida de la bomba.***

Una Turbina es un dispositivo mecánico que permite extraer energía de un flujo. Su efecto lo podemos esquematizar como sigue:



En el tanque la energía es igual a Z_1, ya que la presión y la velocidad son cero. A lo largo del conducto1-2 se pierde una cierta cantidad Hf_{1-2} de manera que a la entrada de la turbina el flujo tiene

$$H_2 = Z_1 – Hf_{1-2}$$

La turbina se encarga de extraerle al flujo una cantidad de energía específica igual a H_T, de manera que a la salida de la turbina el flujo solo tiene una pequeña cantidad de energía H_3.

Entonces la ecuación de Bernoulli se puede escribir

$$Z_1 – Hf_{1-2} – H_T = H_3$$

Potencia de un flujo

La potencia se define como el cociente del trabajo realizado entre el tiempo necesario para realizarlo:

$$\text{Potencia} = \text{trabajo / tiempo} = \tau / t = F\, d / t = F\, v$$

Donde τ es el trabajo que realiza la fuerza F cuando el cuerpo se desplaza una distancia d. Por ello la potencia también es el producto de la fuerza por la velocidad v.

Para subir un cuerpo que pesa W hasta una altura H (con velocidad constante y bajo el supuesto de no tomar en cuenta la fricción), será necesario aplicarle una fuerza F igual al peso; es decir será necesario realizar un trabajo W H, como esto requiere un tiempo t, entonces la potencia será:

$$Pot = \tau / t = W\,H / t$$

Si el cuerpo de peso W es una cantidad de líquido, podemos escribir el peso en función del peso específico $W = \gamma V$

$$Pot = W\,H / t = \gamma\, V\,H / t$$

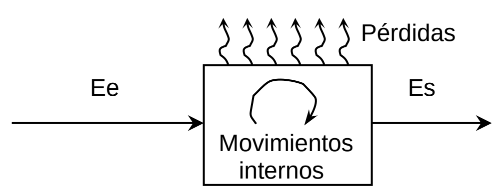
Como $Q = V / t$

$$Pot = \gamma\, Q\, H$$

Que es la *potencia de un líquido* de peso específico γ que circula con un gasto Q *desde o hasta* una altura H.

Eficiencia

Sabemos que las máquinas no son 100% eficientes; es decir, siempre “dan” menos energía o trabajo útil que el que se les suministra, pues parte de esa energía no se aprovecha por la máquina, (por ejemplo, los motores de combustión interna no queman el 100% del combustible) parte se utiliza para mover la masa de la propia máquina y otra parte se usa para vencer a la fricción, y solo el resto es la que se aprovecha como trabajo útil que proporciona la máquina. Esto lo podemos esquematizar de la siguiente manera



Donde Ee es la energía de entrada a la máquina o sistema, la que se le proporciona, y Es es la energía de salida o energía útil que “da” la máquina o sistema.

La eficiencia $\in$ es un número que representa la relación o cociente de la energía de salida entre la energía de entrada

$$\varepsilon = \frac{E_S}{E_E}$$

Como la energía de salida siempre es menor que la de entrada, entonces la eficiencia siempre es menor que 1

$$Es < Ee \quad ; \quad \varepsilon < 1$$

Potencia de una bomba.

En el caso de una bomba, la ***potencia nominal***, que es con la que se identifica en el comercio, **es la potencia *de entrada*** a la bomba, es decir la que se le suministra mediante combustible o energía eléctrica, la que la bomba "consume" y que será *menor* que la de *salida*; es decir, la que la bomba le suministra al fluido, de manera que la potencia nominal de una bomba será:

$$Pot_B = \frac{\gamma Q H_B}{\varepsilon}$$

Donde $\in$ es la eficiencia de la bomba siempre menor que 1, de manera que la potencia nominal (de entrada) siempre será mayor que la útil, la que realmente se le suministra al flujo.

Potencia de una turbina.

En el caso de una turbina, al no ser completamente eficiente no alcanza a extraer toda la energía del líquido por lo cual la potencia de salida de una turbina (la nominal) será menor que la suministrada por el líquido, entonces:

$$Pot_T = \gamma\ Q\ H_T \in$$

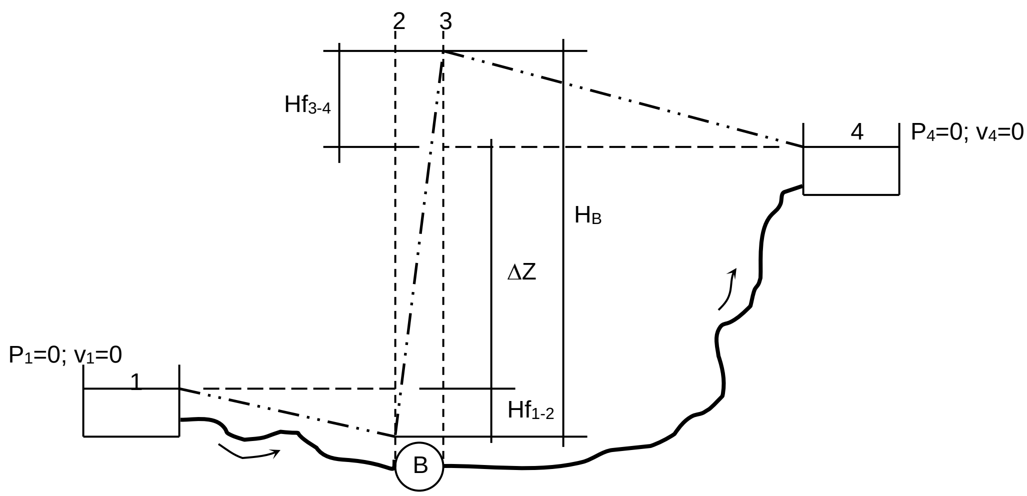
Unidades**. Las unidades de potencia son:**

Ecuación	Sistema / Deducción de unidades	Unidades
	MKS absoluto	
Pot = Fd/t	N m /s = Watt	N m /s = Watt
Pot = γ Q H	(N / m^3) / (m^3 / s) m = N m /s = Watt	N m /s = Watt
	MKS técnico	
Pot = Fd/t	Kg m / s	Kg m / s
Pot = γ Q H	(Kg / m^3) / (m^3 / s) m = Kg m /s	Kg m / s
	Ingles técnico	
Pot = Fd/t	Lb ft /s	Lb ft /s
Pot = γ Q H	(Lb/ ft^3) / (ft^3 / s) ft = Lb ft /s	Lb ft /s

También son usadas otras unidades fuera de sistema como los caballos de fuerza (*Horse power*) Hp, y los caballos de vapor CV prácticamente en desuso

Algunas equivalencias son: 1 Hp = 76.01 kg m/s = 745.7 Watts= 550lb ft/s
1 kW =1.341 Hp= 737.5 lb-ft/s
1 CV = 735.5 W

Ejemplo 4.10. Calcular la potencia nominal de una bomba cuya eficiencia es de 60 % si el gasto que debe conducirse es de 30 lt/s desde el tanque 1 hasta el tanque 4 ubicado 58 m más arriba. Las pérdidas de energía de 1 a 2 son 1.5 m y las de 3 a 4 son de 3.8 m.



$Hf_{1-2} = 1.5$ m ; $Hf_{3-4} = 3.8$ m ; $\Delta Z = 58$ m ; $\in = 60\ \% = 0.60$; $Q = 30$ Lt / s

Solución:

Por Bernoulli $H_B = \Delta Z + Hf_{1-2} + Hf_{3-4} = 58 + 1.5 + 3.8 = 63.3$ m

La potencia de la bomba $Pot_B = \gamma\ Q\ H_B / \in = 1000\ (0.030)\ 63.3 / 0.60$

$Pot_B = 3165$ Kg m /s

$Pot_B = (3165$ kg m /s) 1 Hp / 76.01 Kg m /s = 41.63 Hp

Como en el comercio no existe una bomba de esta potencia, lo adecuado es adquirir una de potencia superior dentro de las que existen comercialmente. En este caso podemos suponer que si existen las bombas de 50 Hp.

Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento.

Esta ecuación nos permite determinar las fuerzas y presiones dinámicas que se generan entre las diversas partículas de un líquido en movimiento y entre el líquido y las superficies sólidas que se encuentran en contacto con él, ya sea las paredes de un conducto o cuerpos sumergidos en la corriente, esto es tan amplio e interesante que comprende curvas en canales y codos en tuberías; contracciones o boquillas; superficies desviadoras como los alerones de un avión, los álabes de una turbina, las aspas de un ventilador, la hélice de un barco o el impulsor de una bomba; también se puede determinar el empuje dinámico de la corriente de un río sobre las columnas de un puente o la resistencia al avance de vehículos y proyectiles, así como los problemas de propulsión a chorro.

Como habíamos mencionado anteriormente, la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento proviene de la segunda Ley de Newton en su versión más común: $\Sigma F = ma$ [1]

Aquí la deduciremos primero para una partícula y posteriormente para un volumen de control.

En la segunda ley de Newton

$\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ sustituimos la definición de aceleración $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt$

Quedando $\Sigma \boldsymbol{F} = m\, d\boldsymbol{v} / dt$ o bien $\Sigma \boldsymbol{F}\, dt = m\, d\boldsymbol{v}$

Integrando desde la velocidad $\boldsymbol{v_1}$ que la partícula tiene en el tiempo t_1, hasta la velocidad $\boldsymbol{v_2}$ que la partícula lleva en el tiempo t_2, tenemos:

$$\Sigma \int_{t1}^{t2} F dt = m \int_{v1}^{v2} dv$$

$$\Sigma \int_{t1}^{t2} F dt = mv_2 - mv_1 \qquad 6.14$$

El primer término representa el impulso lineal total, suma de impulsos o impulso resultante, que actúa sobre la partícula, ocasionado por el conjunto de fuerzas ΣF que actúan durante el lapso de tiempo que va de t_1 hasta t_2. Los términos mv_1 y mv_2 son las cantidades de movimiento lineales (también llamadas *momentum*) de la partícula, antes y después de que actúa el conjunto de impulsos.

La ecuación anterior es el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula, y se puede enunciar de la siguiente manera:

> ***La suma de los impulsos que actúan sobre una partícula es igual al cambio en su cantidad de movimiento.***

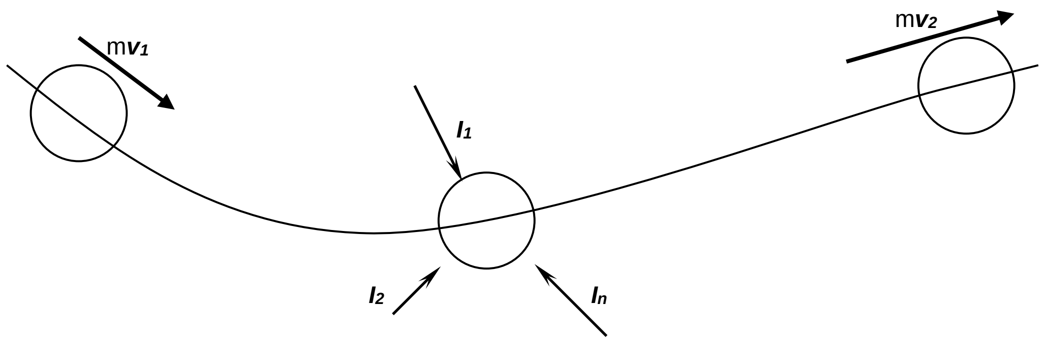
Otra forma de escribirlo es:

---

[1] De hecho Newton formuló la segunda ley en términos de impulso y cantidad de movimiento.

$$m\boldsymbol{v_1} + \Sigma \int_{t1}^{t2} F dt = m\boldsymbol{v_2} \qquad 6.15$$

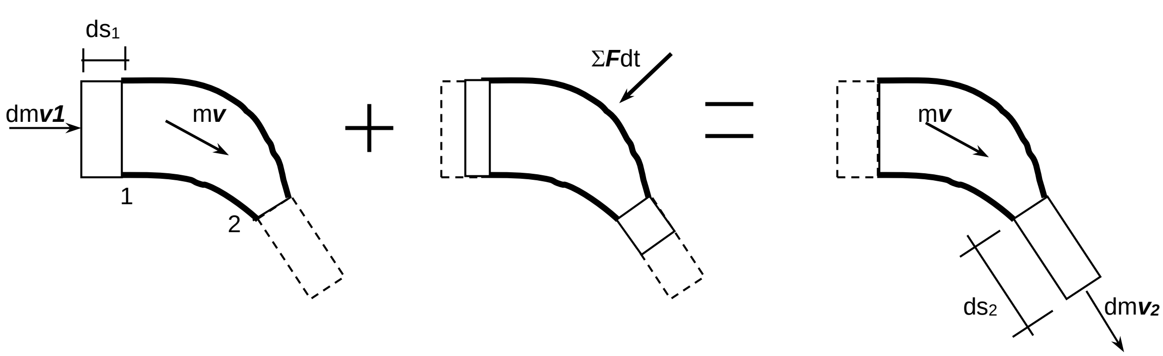
Que nos indica cómo, la cantidad de movimiento que un cuerpo tiene, al inicio de un proceso, mv_1 es modificada por la sumatoria de todos los impulsos, $\Sigma \int_{t1}^{12} Fdt$ de manera que al final, la cantidad de movimiento ya tiene otro valor mv_2



Si las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo son constantes la integral se puede resolver, si además se mide el tiempo inicial t_1 desde cero, la ecuación queda

$$m\boldsymbol{v_1} + \Sigma \boldsymbol{F}\, t = m\boldsymbol{v_2} \qquad 6.16$$

Para deducir la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento aplicada a un flujo permanente unidimensional de un fluido incompresible definiremos un volumen de control como el mostrado, que está limitado por las paredes del codo reductor y por las secciones 1 de entrada y 2 de salida



En cualquier tiempo, el fluido que está dentro del volumen de control tiene una masa m y una velocidad promedio v que es constante durante el intervalo de tiempo dt, en ese tiempo una pequeña cantidad de masa dm entra por la sección 1 con una velocidad v_1 y, al mismo tiempo, por la sección 2 sale la misma cantidad de masa dm con velocidad v_2 (la masa que entra es igual a la masa que sale, ya que el fluido es incompresible).

La fuerza externa ΣF es la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el flujo contenido en el volumen de control, es constante puesto que el flujo es permanente, y al actuar durante el tiempo dt produce un impulso que es el que cambia la cantidad de movimiento y por lo tanto la velocidad entre las secciones 1 y 2.

Aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento tenemos

$$dm\boldsymbol{v_1} + m\boldsymbol{v} + \Sigma \boldsymbol{F}dt = m\boldsymbol{v} + dm\boldsymbol{v_2} \qquad 6.17$$

Como la cantidad de movimiento dentro del codo es constante en t y en t+dt se puede reducir

$$\Sigma \boldsymbol{F}dt = dm\boldsymbol{v_2} - dm\boldsymbol{v_1}$$

Factorizando y despejando

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{dm}{dt} (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})$$

Donde $dm / dt = Q_m = \rho\ dV / dt = \rho\ Q$

Entonces

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \rho\ Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) \qquad 6.18$$

O bien:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{\gamma}{g} Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}) \qquad 6.19$$

Ambas ecuaciones corresponden al principio del impulso y la cantidad de movimiento para un fluido ideal incompresible con flujo permanente unidimensional. Esta ecuación plantea que

La suma de fuerzas externas que actúa sobre la porción de un fluido contenido en un volumen de control es igual al producto de la densidad por el gasto por el cambio de velocidad.

Aunque ambas ecuaciones son válidas en cualquier sistema de unidades, por simplicidad es preferible usar la 6.18 con el MKS absoluto y la 6.19 con un sistema técnico. En cualquier caso las ecuaciones 6.18 y 6.19 son dimensionalmente coherentes

En el MKS absoluto $[\rho\ Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})] = (kg/m^3) (m^3/s) (m/s) = kg\ m/s^2 = N = [F]$

En general $[\rho\ Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})] = M L^{-3} L^3 T^{-1} L T^{-1} = M L T^{-2} = [F]$ para los absolutos

En el MKS técnico $[\frac{\gamma}{g} Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})] = \frac{kg / m^3}{m / s^2} (m^3/s) (m/s) = kg = [F]$

En general $[\frac{\gamma}{g} Q (\boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1})] = \frac{FL^{-3}}{LT^{-2}} L^3T^{-1}LT^{-1} = F$ *para los técnicos*

Como la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento es vectorial puede descomponerse en sus componentes y aplicarse a lo largo de los ejes X, Y, Z :

$$\Sigma F_X = \rho\, Q\, (v_2 - v_1)_X \qquad \Sigma F_Y = \rho\, Q\, (v_2 - v_1)_Y \qquad \Sigma F_Z = \rho\, Q\, (v_2 - v_1)_Z$$

o bien

$$\Sigma F_X = \frac{\gamma}{g}\, Q\, (v_2 - v_1)_X \qquad \Sigma F_Y = \frac{\gamma}{g}\, Q\, (v_2 - v_1)_Y \qquad \Sigma F_Z = \frac{\gamma}{g}\, Q\, (v_2 - v_1)_Z$$

Procedimiento de análisis

1.- Determinar el volumen de control y hacer un esquema representando las fuerzas que actúan sobre el líquido dentro de dicho volumen. Esto es equivalente al diagrama de cuerpo libre.

2.- Las fuerzas que ***pueden*** estar actuando son:

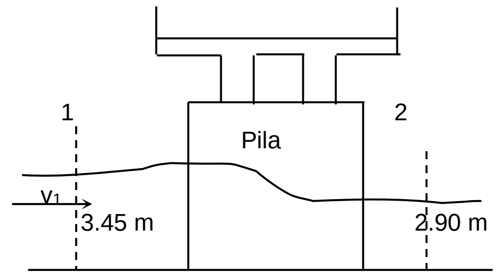
- Las fuerzas de presión que el resto del líquido le aplica al que se encuentra dentro del volumen de control.
- Las Fuerzas de las superficies sólidas en contacto con el fluido y que lo desvían, chocan con él y en general lo aceleran.
- El peso del fluido dentro del volumen de control cuando existe cambio en la cantidad de movimiento en el eje vertical; por ejemplo, cuando el codo está contenido en un plano vertical.
- El peso de las estructuras cuando es soportado por el flujo.

3.- Aplicar la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento a lo largo de dos o tres ejes. Puesto que ésta es una ecuación vectorial, debemos tener cuidado con los signos, ya que representan el sentido de los vectores, y debe haber coherencia entre el diagrama del volumen de control y los signos en la ecuación. En general es conveniente considerar positivo el sentido del flujo y especificar en el diagrama el sistema de referencia.

Ejemplo 4.11. Las pilas de un puente están separadas 9.50 m centro a centro. Aguas arriba del puente el tirante es de 3.45 m y la velocidad media del flujo es de 3.10 m/s . En la sección aguas abajo el tirante es de 2.90 m. Despreciando las pérdidas por fricción y la pendiente del fondo del río calcular el empuje dinámico sobre cada pila.

Solución:

$\rightarrow \Sigma F_X = \rho\, Q\, (v_2 - v_1)_X$ (1)

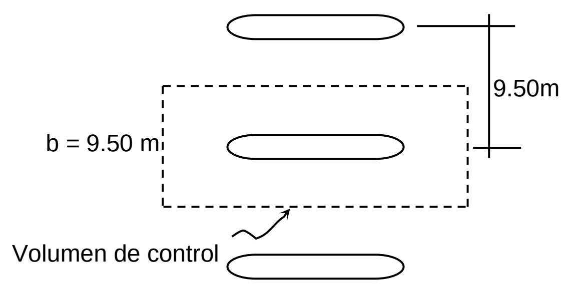


Alzado

Donde ΣF_X son las fuerzas aplicadas sobre el líquido contenido en el volumen de control (V.C:), En este caso solo actúan a lo largo del eje X ya que solo en este eje hay cambio de velocidad.

$Q = A_1\, v_1 = 3.45(9.50)\,(3.10) = 101.6\ m^3/s$

$v_2 = Q/A_2 = 101.6/\,(2.90)(9.50) = 3.69\ m/s$



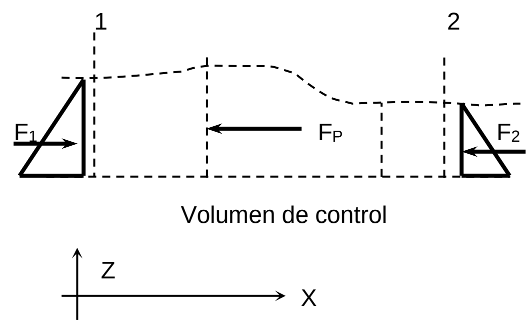
Planta

Las fuerzas aplicadas sobre el V.C. son las de presión hidrostática en 1 y 2 y la que la pila le aplica F_P

$F_1 = ½\, \gamma h_1^2 b = ½\ 1000\ (3.45)^2\ (9.5) =$
$F_1 = 56536.9$ kg

$F_2 = ½\, \gamma h_2^2 b = ½\ 1000\ (2.90)^2\ (9.5) =$
$F_2 = 39947.5$ kg

Sust en (1)
$\Sigma F_X = \rho\, Q\, (v_2 - v_1)_X$



$F_1 - F_2 - F_P = (\gamma/g)\ \ Q\, (v_2 - v_1)$

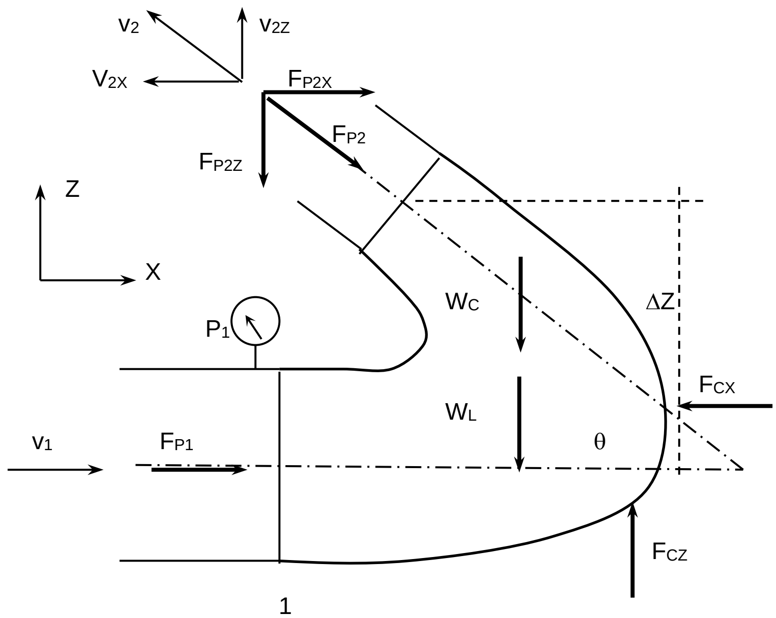
$56536.9 - 39947.5 - F_P = (1000/9.81)(101.6)\,(3.69 - 3.10)$

$F_P = 10579$ kg

Esta es la fuerza que la pila le aplica a la corriente, por la tercera ley de Newton será una fuerza igual y opuesta la que la corriente le aplique a la pila.
Nótese que estamos despreciando la fricción y suponiendo el fondo plano e impermeable (sin socavación ni flotación sobre la cimentación).

La fuerza de flotación sobre la pila es una fuerza estática que se calcula por los métodos estudiados en el capítulo de hidrostática

Ejemplo 4.12. Calcular la fuerza ejercida por el flujo sobre el codo vertical mostrado. La lectura en el manómetro es de 130 kPa cuando fluye agua con una velocidad de 3.5 m/s en esa sección. El volumen del codo es de 340 lt, su peso es de 285 Kg, ΔZ = 2.15 m, θ = 30º.



Solución:

1) El volumen de control coincide con el codo.

2) Áreas, gasto y vels.

$A_1 = (\pi/4)D_1^2 = (\pi/4)(0.5^2)$
$A_1 = 0.196\ m^2$
$A_2 = (\pi/4)D_2^2 = (\pi/4)(0.3^2)$
$A_2 = 0.0707\ m^2$

$Q = A_1\ v_1 = (0.196)(3.5)$
$Q = 0.686\ m^3/s$

$V_2 = Q/A_2 = 0.686/0.0707$
$V_2 = 9.70$ m/s

3) Peso del líquido dentro del codo
$W_L = \gamma\ V = (9810)\ (0.34) = 3335\ N$

4) Peso del codo
$W_C = 285$ Kg $= 2796\ N$

5) Bernoulli de 1 a2 para determinar P_2

$Z_1 + P_1 / \gamma + v_1^2/2g = Z_2 + P_2 / \gamma + v_2^2/2g$

$$0 + \frac{130000}{9810} + \frac{3.5^2}{2(9.81)} = 2.15 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{9.70^2}{2(9.81)}$$

$13.25 + 0.62 = 2.15 + P_2 / \gamma + 4.8$

$P_2 / \gamma = 6.92\ m$

$P_2 = (6.92)\ (9810) = 67885\ N/m^2$

6) Fuerzas de presión

$F_{P1} = P_1\ A_1 = 130000\ (0.196) = 25480$ N

$F_{P2} = P_2\ A_2 = 67885\ (0.0707) = 4799$ N

$F_{P2X} = F_{P2} \cos \theta = 4799 \cos 30°$
$F_{P2X} = 4156$ N
$F_{P2Z} = F_{P2}$ sen $\theta = 4799$ sen $30°$
$F_{P2Z} = 2399.5$ N

$V_{2X} = V_2 \cos \theta = 9.70 \cos 30° = 8.4$ m/s
Nótese que V_{2X} tiene sentido negativo
$V_{2Z} = V_2$sen $\theta = 9.70$ sen$30° = 4.85$ m/s

7) Ec de Impulso y Cantidad de mov.

$\rightarrow \Sigma F_X = F_{P1X} - F_{CX} + F_{P2X} = \rho\ Q\ (v_{2X} - v_{1X})$

$25480 - F_{CX} + 4156 = 1000(0.686)(-8.4-3.5)$
Nótese que el signo – de 8.4 corresponde al sentido del vector

F_{CX} = 37799 N = 37.8kN

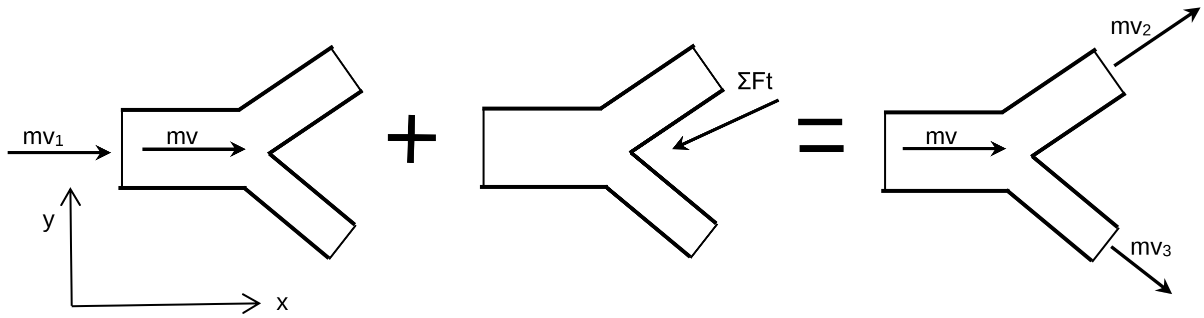
$\uparrow \Sigma F_Z = F_{CZ} - W_C - W_L - F_{P2Z} = \rho\ Q\ (v_{2Z} - v_{1Z})$

$F_{CZ} - 2796 - 3335 - 2399.5 = 1000(0.686)(4.85 - 0)$

F_{CZ} = 11857.6 N = 11.9 kN

Ecuación del Impulso y la cantidad de movimiento para el flujo permanente de un fluido incompresible que circula por una bifurcación contenida en un plano horizontal.

Consideremos una tubería con una bifurcación B como la mostrada en la figura



La Ec. De impulso y cantidad de movimiento plantea que:

$$\sum I = CM_f - CM_i$$

$$\sum Ft = (m_2 v_2 + m_3 v_3 + mv) - (m_1 v_1 + mv)$$

Como la cantidad de movimiento dentro de la bifurcación es igual durante todo el proceso puede cancelarse

$$\sum Ft = (m_2 v_2 + m_3 v_3) - (m_1 v_1)$$

Como $m = \rho V$, y $Q = V/t$ y aplicando la Ec. Anterior a lo largo del eje *x*:

$$\sum F_x = \frac{\rho V_2 v_{2x}}{t} + \frac{\rho V_3 v_{3x}}{t} - \frac{\rho V_1 v_{1x}}{t}$$

$$\sum F_x = \rho(Q_2 v_{2x} + Q_3 v_{3x} - Q_1 v_{1x})$$

De manera similar en el eje *y* queda

$$\sum F_y = \rho(Q_2 v_{2y} - Q_3 v_{3y} - Q_1 v_{1y})$$

En este caso

$$Q_1 v_{1y} = 0$$

Quedando

$$\sum F_y = \rho(Q_2 v_{2y} - Q_3 v_{3y})$$

Nótese que el signo menos corresponde al sentido negativo de v_{3y}

En el eje z, la ec. No se aplica porque la bifurcación está contenida en un plano horizontal.

Cuestionario 4

1. ¿Cuáles son las ecuaciones fundamentales de la Hidráulica y de que principios físicos provienen?
2. ¿Cuál es el enunciado y la expresión matemática de la ecuación de continuidad para un flujo permanente de un fluido incompresible?
3. ¿Cuáles son las energías que existen en un flujo permanente de un fluido incompresible? Escribe sus expresiones matemáticas.
4. ¿Cuál es el enunciado de la ley de conservación de la energía aplicado a flujos?
5. Escribe la ecuación de Bernoulli en su versión extendida para un fluido ideal.
6. Escribe la ecuación de Bernoulli en su versión resumida para un fluido ideal y para uno real.
7. ¿Para qué tipo de flujo y fluido se obtuvo la ec. de Bernoulli?
8. ¿Qué son cada uno de los términos de la Ecuación de Bernoulli?
9. ¿Cómo se define y cuáles son las dimensiones de la energía específica?
10. ¿Porque los términos de la ecuación de Bernoulli se miden en unidades de longitud?
11. ¿Cuáles son las unidades de energía específica en el MKS técnico y en el absoluto?
12. ¿Qué es un piezómetro?
13. ¿Qué es un tubo de Pitot?
14. ¿En una tubería de donde a dónde va la altura o carga de velocidad?
15. ¿En una tubería de donde a dónde va la altura o carga de presión?
16. ¿Con qué coincide la línea piezométrica en un canal?
17. ¿Cómo se representa gráficamente la energía específica de posición en tuberías y en canales?
18. ¿Qué indica la altura de la columna de líquido dentro de piezómetro?
19. ¿Qué indica la altura de la columna de líquido dentro de un tubo de Pitot?
20. ¿Cuáles son las líneas de energía y de donde a dónde van?
21. Menciona tres secciones en donde sea fácil aplicar la ec. de Bernoulli.
22. ¿Dónde se encuentra la línea de energías totales en el caso de los canales?
23. ¿Cuánto valen cada una de las energías específicas en la superficie libre de un tanque que alimenta a una tubería y por qué?
24. ¿Qué son las pérdidas y de qué factores dependen?
25. ¿Qué representa la distancia vertical desde el nivel de referencia a la línea de energías totales?
26. ¿Cuánto valen cada una de las energías específicas en un chorro descargando a la atmósfera?
27. ¿Qué es el horizonte de energía?
28. ¿Cómo se puede visualizar la altura o carga de velocidad?
29. ¿Cómo se representan gráficamente las pérdidas de energía?
30. ¿Qué es la pendiente hidráulica, y cuál es su expresión matemática?
31. ¿Cómo se representa gráficamente la pendiente hidráulica?
32. ¿Qué características debe tener una tubería para que las diferentes energías específicas se mantengan constantes?
33. ¿Que plantea el teorema de Torricelli?
34. ¿Por qué coinciden en su expresión de velocidad, dos fenómenos tan diferentes como el vaciado de un tanque y la caída libre de un cuerpo?
35. ¿Qué es un sifón?
36. ¿Para qué sirve un sifón?
37. ¿Qué factor limita la altura a la que puede subir un líquido por un sifón?
38. ¿En qué condiciones se puede presentar cavitación dentro de una tubería?

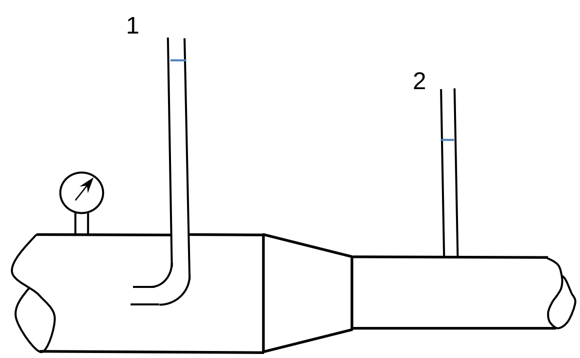
39. ¿Cuál es la función de una bomba hidráulica?
40. ¿Cómo se calcula la energía específica que una bomba le suministra a un líquido?
41. ¿Cuál es la función de una turbina?
42. ¿Cuál es la expresión para calcular la potencia de un flujo, de una bomba y de una turbina?
43. Menciona tres problemas que se pueden estudiar mediante la ecuación del impulso y la cantidad de movimiento.
44. ¿Cómo se define el impulso y que unidades tiene?
45. ¿Cuál es la definición de cantidad de movimiento y que unidades tiene?
46. ¿Qué plantea el principio del impulso y la cantidad de movimiento aplicado al movimiento de una partícula?
47. ¿Qué plantea el principio del impulso y la cantidad de movimiento aplicado al flujo de un fluido ideal incompresible con flujo permanente? Escribe su ecuación.
48. ¿Cuáles son las fuerzas que pueden intervenir en la ecuación a de impulso y cantidad de movimiento aplicado a un volumen de control?

Ejercicios propuestos 4:

4.1 En la tubería mostrada, el agua sube por el tubo de Pitot hasta una altura de 8 m (medida desde el eje de la tubería principal) y el manómetro de carátula indica 73.5 kPa. A) Dibujar las líneas de energía. Encontrar B) La altura de presión en 1. C) la velocidad en 1. D) El gasto. E) la energía de velocidad en 2. F) La altura a la que llega el agua por el piezómetro 2.

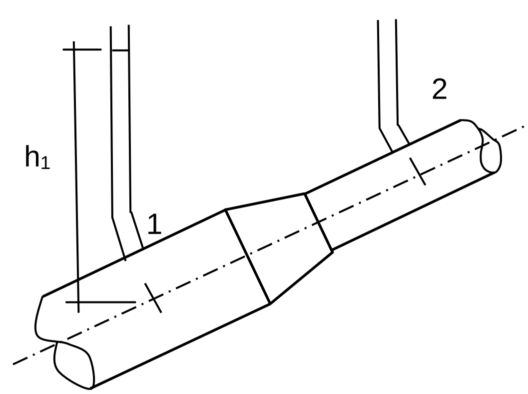
D1 = 40 cm
D2 = 30 cm

Sol.
B) P_1/γ =7.49 m
C) v_1 = 30156 m/s
D) Q = 0.3966 m^3/s
E) $\frac{v_2^2}{2g} = 1.6\ m$
F) $\frac{P_2}{\gamma} = h_2 = 6.396m$



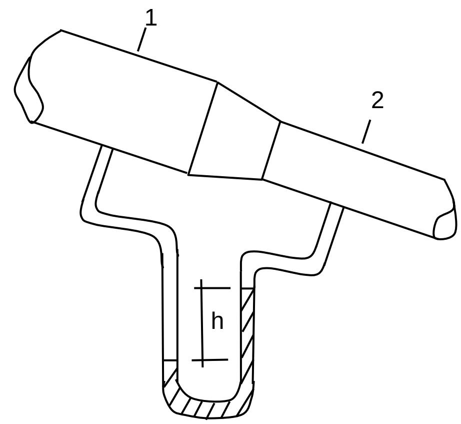
4.2 Por la tubería mostrada circula aceite Dr = 0.78, encontrar el caudal y la altura en el piezómetro 2. Dibujar las líneas de energía.
h_1 = 3.87 m; D_1 = 30 cm; D_2 = 20 cm
v_2 = 4.6 m/s

Sol.
Q = 144.5 lt/s
h_2 = 1.675 m



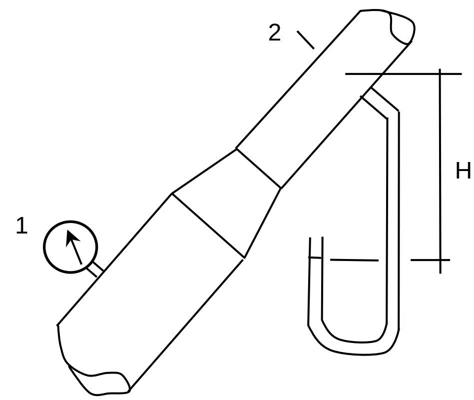
4.3 Encontrar el régimen de flujo que circula por el tramo de tubería mostrado si la lectura del manómetro diferencial es conocida. Circula gasolina.
D_1= 300 mm
D_2= 250 mm
h = 385 mm
Líquido manométrico: mercurio
Considerar densidad relativa de la gasolina igual a 0.68

Sol. Q = 0.816 m^3/s



4.4 Si en la sección 2 de la tubería mostrada se presenta cavitación, cuando Q = 67.1 lt/s de agua a 40ºC, encontrar H y la lectura del manómetro en 1. El barómetro indica 750 mm de Hg. Suponer liq. Ideal. Dibujar las líneas de energía.
D_1 = 30 cm
D_2 = 15 cm
Z_1 = 12.3 m
Z_2 = 30.6 m

Sol. H = 9.42m
P_1 = 93.125 KPa



4.5 Por la instalación mostrada fluye petróleo crudo, si h = 2.43 m, encontrar:
a) La energía de velocidad en 1 y 2.
b) La energía específica que suministra la bomba H_B.
c) La potencia de la bomba en Kw y Hp
d) Dibujar la LET y la línea piezométrica.

D1 = 0.15m; D2 = 0.1m; Q = 32 lt/s; Z1= 30m; ε = 70%; Dr = 0.855
Considerar líquido ideal.

Sol.
a) 0.167 m, 0.846 m
b) 31.109 m
c) 11.93 Kw = 16 Hp